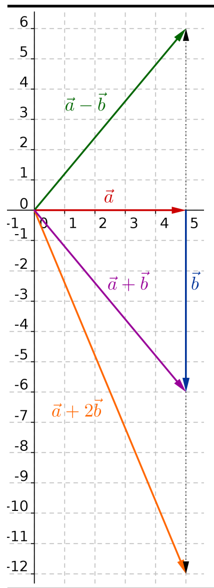
Verifica di Fisica 4/12/23 - Soluzioni

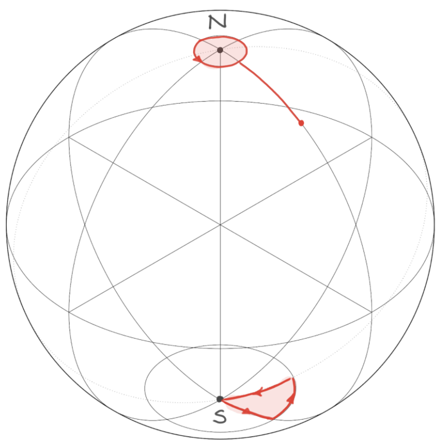
Esercizio 1. (12pt) Una rudimentale bilancia è costituita da un pianale collegato ad un'unica molla. Quando sul pianale viene appoggiato un maialino di massa 120 Kg la molla si comprime di 10 cm.
Il sistema costituito da bilancia e maialino viene teletrasportato sulla Luna, dove l'accelerazione di gravità è $\frac{1}{6}$ di quella terrestre. Quanti Kg sono in tal caso riportati sul display della bilancia, qual è il corrispondente peso del maialino sulla Luna e di quanti cm è compressa la molla all'interno della bilancia?

Soluzione. Sulla Terra il peso del maialino è dato da $120\,\mathrm{Kg} \cdot 9.8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Kg}} = 1176\,\mathrm{N}$. Poiché la gravità lunare è $\frac{1}{6}$ di quella terrestre, la medesima bilancia utilizzata sulla Luna fornisce una massa apparente che è $\frac{1}{6}$ di quella reale, ossia $20\,\mathrm{Kg}$. Analogamente il peso del maialino sulla Luna è $\frac{1}{6}$ del suo peso sulla Terra, ossia $196\,\mathrm{N}$. Infine, sempre per corrispondenze dovute a proporzionalità dirette, la molla sulla Luna si comprime di $\frac{10}{6}\,\mathrm{cm} \approx 1.67\,\mathrm{cm}$.



Esercizio 2. (15pt) Nel piano cartesiano il vettore $\vec{a}$ corrisponde ad uno spostamento di 5 m verso destra e il vettore $\vec{b}$ corrisponde ad uno spostamento di 6 m verso il basso. Si rappresentino graficamente il vettore $\vec{a}+\vec{b}$, il vettore $\vec{a}-\vec{b}$ e si determini il modulo del vettore $\vec{a}+2\vec{b}$.

Soluzione. I vettori $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$ sono rappresentati accanto, rispettivamente in viola e in verde, dove il lato di un quadretto corrisponde ad 1 m.
In coordinate si ha $\vec{a}+2\vec{b} = (5\,\mathrm{m}; -12\,\mathrm{m})$, dunque il modulo del vettore $\vec{a}+2\vec{b}$ è $13\,\mathrm{m}$ poiché $(5, 12, 13)$ è un terna pitagorica.



Esercizio 3. (23pt) Un orso si sposta di 10 Km verso Nord, di 10 Km verso Est e di 10 Km verso Sud. Dopo questa sequenza di spostamenti si ritrova esattamente nel punto di partenza. Come è possibile che si abbia tale situazione?
Quanto vale l'area del triangolo delimitato dagli spostamenti dell'orso?

Nota: *Nel caso vi fosse utile, potete considerare il raggio terrestre pari a* 6400 Km.

Soluzione. La situazione descritta è possibile solo in virtù del fatto che la superficie terrestre **non è** piatta. Approssimando la superficie terrestre con quella di una sfera, il problema ammette di fatto *infinite* soluzioni, appartenenti ad uno di questi due tipi:

- L'orso parte dal polo Sud, percorre 10 Km verso Nord seguendo un qualunque meridiano, segue un parallelo percorrendo 10 Km verso Est e infine ritorna al punto di partenza percorrendo 10 Km verso Sud;
- L'orso parte da un punto in prossimità del polo Nord, si muove lungo un meridiano percorrendo 10 Km, si ritrova a questo punto su un parallelo che ha lunghezza che è un sottomultiplo di 10 Km, lo percorre per intero (eventualmente più volte) e poi ritorna al punto di partenza lungo lo stesso meridiano su cui si è mosso inizialmente.

La regione racchiusa dalla passeggiata dell'orso è un triangolo (curvilineo) solo nel primo caso. Poiché 10 Km rappresentano una porzione trascurabile della lunghezza del raggio terrestre, nel primo caso l'area richiesta è abbastanza vicina a quella di un triangolo equilatero di lato 10 Km, ossia $\frac{\sqrt{3}}{4}(10\,\mathrm{Km})^2 \approx 43.3\,\mathrm{Km}^2$. Tenendo conto della curvatura terrestre (ossia trovando la corretta porzione della superficie di una calotta sferica) si trovano esattamente $50\,\mathrm{Km}^2$. Nel secondo caso l'area racchiusa dalla passeggiata dell'orso è approssimativamente l'area racchiusa da una circonferenza di lunghezza 10 Km o sottomultipli, ossia

$$\pi\left(\frac{10\,\mathrm{Km}}{2\pi n}\right)^2 = \frac{1}{4\pi n^2}(10\,\mathrm{Km})^2 \approx \frac{7.96}{n^2}\,\mathrm{Km}^2$$

per un qualche valore di $n \in \mathbb{N}^+$.
L'osservazione per cui *al polo Sud non vivono orsi* esclude le soluzioni del primo tipo.

Addendum riguardo gli errori più comuni

In tutti gli esercizi. Leggete attentamente il testo e controllate quante sono le richieste per esercizio: in caso di dubbi interpellate direttamente l'insegnante. Ricordiamo poi che grandezze uguali devono avere la stessa unità di misura: in particolare $\sqrt{5^2+12^2}$ e 13 m sono cose diverse, poiché la prima è un numero puro mentre la seconda è una lunghezza. Analogamente $192\,\mathrm{Kg} \neq 192\,\mathrm{N}$ e un'area non può misurarsi in m o Km, ma è possibile che si misuri in Km^2. Riguardo il Teorema di Pitagora, ricordiamo di tirare le radici quadrate per intero (su tutto il loro argomento e non soltanto su parte dell'argomento), controllare i segni a seconda che si stia ricostruendo un cateto o l'ipotenusa, lavorare correttamente con le unità di misura:

$$\sqrt{(5\,\mathrm{m})^2+(12\,\mathrm{m})^2} = \sqrt{(5^2+12^2)\,\mathrm{m}^2} = \sqrt{169\,\mathrm{m}^2} = 13\,\mathrm{m}.$$

Inoltre: *accelerazione/accelerare/accelerato* si scrivono con una ℓ sola.

Esercizio 1. È bene ricordare che peso e massa sono cose diverse: la massa è una grandezza scalare e una caratteristica intrinseca di un corpo, il peso è una grandezza vettoriale che dipende dal pianeta su cui il corpo è collocato. Il display di una bilancia riporta tecnicamente una massa, ma il funzionamento interno di una bilancia dipende dalla diretta proporzionalità tra il peso che grava sul piatto e l'accorciamento delle molle al di sotto del pianale. In particolare una bilancia fabbricata per l'utilizzo terrestre sulla Luna non riporta la massa corretta, ma un sesto della massa effettiva.

Esercizio 2. Il vettore $\vec{a}+\vec{b}$ punto verso destra e verso il basso (appartiene al quarto quadrante), il vettore $\vec{a}-\vec{b}$ punta verso destra e verso l'alto (appartiene al primo quadrante). Un vettore e il suo modulo sono cose diverse: la scrittura $\vec{a}+\vec{b}=(5;12)$ è corretta, la scrittura $\vec{a}+\vec{b}=13$ non lo è: il modulo di $\vec{a}+\vec{b}$ si indica attraverso $\|\vec{a}+\vec{b}\|$ oppure $|\vec{a}+\vec{b}|$. Nelle rappresentazioni grafiche nessuno richiederà mai totale accuratezza, ma è bene rispettare le proporzioni tra gli elementi forniti dal testo, come il fatto che $\vec{b}$ sia più lungo di $\vec{a}$.

Esercizio 3. Molti hanno correttamente intuito che il tour descritto dall'esercizio è possibile solo in prossimità di uno dei poli, ma non molti hanno argomentato in maniera chiara. Certamente non è possibile che l'orso parta dal polo Nord, visto che da lì *non può* andare verso Nord. Analogamente non tutti i punti della superficie terrestre sono validi punti di partenza del tour dell'orso. Le soluzioni possibili sono di due tipi: quelle in cui nel primo e nel terzo tratto si percorrono meridiani diversi e quelle in cui nel primo e nel terzo tratto si percorre lo stesso meridiano. Le soluzioni che coinvolgono meridiani distinti sono tutte e sole quelle che hanno il polo Sud come punto di partenza.
Le soluzioni in cui il meridiano di partenza coincide con il meridiano di ritorno sono tutte e sole quelle in cui l'orso percorre per intero un parallelo nel suo viaggio verso Est. Queste soluzioni sono possibili facendo partire l'orso 10 Km più a Sud di un parallelo lungo 10 Km (o sottomultipli), comunque sia in prossimità del polo Nord. Un parallelo di lunghezza 10 Km non ha raggio 10 Km, ma ha raggio $\frac{10\,\mathrm{Km}}{2\pi}\approx 1.592\,\mathrm{Km}$, dunque il cerchio delimitato da tale parallelo ha approssimativamente area $\pi(1.592\,\mathrm{Km})^2\approx 7.96\,\mathrm{Km}^2$.