Verifica di Fisica ottobre 2023 - Soluzioni

Esercizio 1. (10pt) Un cannone spara un proiettile di **massa** $M = 2\,Kg$ con **velocità** iniziale $v = 20\frac{m}{s}$, con la traiettoria del proiettile che forma inizialmente un angolo di 45° con il suolo. Sapendo che il valore dell'**accelerazione** di gravità a livello del suolo è $g = 9.8\frac{m}{s^2}$, quale delle seguenti espressioni è ragionevole che fornisca la **distanza** tra il punto di partenza e il punto d'arrivo del proiettile?

$$\textbf{a)}\ \frac{v}{Mg^2} \qquad \textbf{b)}\ \frac{v^2}{g} \qquad \textbf{c)}\ \frac{v}{gM}$$

Soluzione. È sufficiente considerare le dimensioni (ossia le unità di misura) delle tre opzioni proposte. L'unità di misura di **a** è $\frac{s}{m \cdot Kg}$, l'unità di misura di **b** è m e l'unità di misura di **c** è $\frac{s}{Kg}$.
Di queste, l'unica che può rappresentare una distanza (ossia una lunghezza) è la **b**.

Esercizio 2. (16pt) La seguente tabella (incompleta) riporta misure ed errori di una **lunghezza** L, di un **tempo** T e di una **accelerazione** a:

Misura	Errore assoluto	Errore relativo
$160\,m$	$4\,m$	
$12.4\,s$		2%
	$0.1\,m/s^2$	1%

Si completino le caselle vuote e si determinino infine misura ed errori della **velocità** v data da aT.

Soluzione. L'errore relativo di L è $\frac{4}{160} = \frac{1}{40} = 2.5\%$. L'errore assoluto di T è $\frac{2}{100} \cdot 12.4\,s = 0.248\,s$.
La misura principale di a è 100 volte l'errore assoluto, ossia $10\,m/s^2$. Segue che la misura principale di $v = aT$ è $124\frac{m}{s}$ e che su questa grava un errore relativo del 3%, ossia un errore assoluto di $3.72\frac{m}{s}$.

Esercizio 3 (Identità di Lagrange)**.** (24pt)
L'espressione $(A^2 + B^2)(C^2 + D^2)$ è equivalente all'espressione $(AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$.
Nell'ipotesi che A, B, C, D siano rispettivamente le lunghezze $8\,m, 2\,m, 3\,m, 5\,m$, tutte affette da un errore relativo dell'1%, si determini l'errore relativo che si accumula sull'output dei due alberi di calcolo.

Soluzione. Per le regole di propagazione dell'errore, nel primo albero abbiamo

$$A^2 = (64 \pm 1.28)\,m^2, \quad B^2 = (4 \pm 0.08)\,m^2, \quad C^2 = (9 \pm 0.18)\,m^2, \quad D^2 = (25 \pm 0.5)\,m^2$$

da cui seguono

$$A^2 + B^2 = (68 \pm 1.36)\,m^2, \qquad C^2 + D^2 = (34 \pm 0.68)\,m^2,$$

entrambi affetti da un errore relativo del 2%.
Nel primo albero l'errore relativo sull'output è dunque del 4%. Nel secondo albero abbiamo

$$AC = (24 \pm 0.48)\,m^2, \quad BD = (10 \pm 0.2)\,m^2, \quad AD = (40 \pm 0.8)\,m^2, \quad BC = (6 \pm 0.12)\,m^2$$

da cui seguono

$$AC + BD = (34 \pm 0.68)\, m^2, \qquad AD - BC = (34 \pm 0.92)\, m^2,$$

il primo affetto da un errore relativo del 2% e il secondo affetto da un errore relativo di poco più del 2.7%. Sui quadrati gravano errori relativi raddoppiati, da cui

$$(AC + BD)^2 = (1156 \pm 46.24)\, m^4, \qquad (AD - BC)^2 = (1156 \pm 62.56)\, m^4.$$

L'output del secondo albero è dunque $(2312 \pm 108.8)\, m^4$, con un errore relativo di circa il 4.7%.
Come prevedibile a priori, a causa del fenomeno di cancellazione numerica il primo albero si rivela più preciso del secondo, anche se non massicciamente.