# 2I - Verifica 23/01/24 - Soluzioni

**Esercizio 1.** (13pt) Si determinino le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x+2y+z &= 7 \\ 4x+3y+2z &= 11 \\ x+2y+4z &= 8. \end{cases}$$

**Soluzione**. Dalla seconda e dalla prima equazione abbiamo $x+y+z=4$, da cui seguono

$$\begin{cases} 2x+y &= 3 \\ x+y+z &= 4 \\ y+3z &= 4. \end{cases}$$

Dalla seconda e dalla terza equazione abbiamo $x=2z$, e una volta che il problema è ridotto a

$$\begin{cases} y+4z &= 3 \\ y+3z &= 4 \end{cases}$$

è immediato che la soluzione del problema sia $(x,y,z)=(-2,7,-1)$.

---

**Esercizio 2.** (18pt) Per quali valori del parametro $\kappa\in\mathbb{R}$ il seguente sistema *non ha* soluzione unica? Quanto vale $x+y+z$ nei restanti casi?

$$\begin{cases} \kappa x+y+z &= 74 \\ x+\kappa y+z &= 67 \\ x+y+\kappa z &= 69 \end{cases}$$

**Soluzione**. È palese che nel caso $\kappa=1$ il sistema sia impossibile. Meno palese, ma comunque vero, è che il sistema è impossibile anche per $\kappa=-2$: in tal caso, infatti, la somma dei termini sinistri è 0 mentre la somma dei termini destri è 210. Il determinante della matrice del sistema è

$$\det\begin{pmatrix}\kappa & 1 & 1\\ 1 & \kappa & 1\\ 1 & 1 & \kappa\end{pmatrix} = \kappa^3+1+1-\kappa-\kappa-\kappa = \kappa^3-3\kappa+2 \overset{\text{Ruffini}}{=} (\kappa+2)(\kappa-1)^2,$$

dunque i casi già trovati ($\kappa=1$ e $\kappa=-2$) sono gli unici in cui il sistema non ha soluzione unica.
In tutti gli altri casi, sommando membro a membro le equazioni del sistema si ha $x+y+z=\frac{210}{\kappa+2}$.

---

**Esercizio 3.** (24pt) Un tetraedro (piramide a base triangolare) nello spazio ha un vertice nell'origine e i rimanenti tre vertici nei punti $(1;1;4),(1;4;1),(4;1;1)$. Sapendo che il volume di un qualunque cono o piramide è un terzo del prodotto tra l'area della base e la lunghezza della corrispondente altezza, qual è il volume del tetraedro?

**Soluzione #1**: per quanto visto a lezione il volume cercato è un sesto del seguente determinante:

$$\det\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix} = 64+1+1-4-4-4=54$$

pertanto la risposta è 9.
**Soluzione #2**: i vertici sul piano $x+y+z=6$ determinano un triangolo equilatero di lato $3\sqrt{2}$, dunque area $\frac{\sqrt{3}}{4}(3\sqrt{2})^2=\frac{9}{2}\sqrt{3}$. Per simmetria la proiezione dell'origine sul piano $x+y+z=6$ è il punto $(2;2;2)$, che fornisce un'altezza pari a $2\sqrt{3}$. Segue che il volume cercato è $\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{3}=9$.