2I - Verifica 20/10/23 - Soluzioni

Esercizio 1. (12pt) Si razionalizzino le seguenti espressioni:

$$\textbf{a)}\ \frac{2}{\sqrt{5}-1} \qquad \textbf{b)}\ \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}-1} \qquad \textbf{c)}\ \frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Soluzione. Abbiamo

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2},$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 5\sqrt{3}-5\sqrt{2}.$$

Esercizio 2. (13pt) Si dimostri quello che nel resto del mondo (ma non in Italia) è noto come *Teorema di Talete*: se A, B sono gli estremi di una semicirconferenza, qualunque altro punto C della semicirconferenza realizza $AC \perp BC$.

Dimostrazione. Detto O il punto medio di AB e detti $\alpha = \widehat{COA}, \beta = \widehat{BOC}$, abbiamo $OA = OB = OC$ per definizione di circonferenza. In particolare sia AOC che BOC sono triangoli isosceli, da cui $\widehat{ACO} = \frac{\pi-\alpha}{2}$ e $\widehat{OCB} = \frac{\pi-\beta}{2}$. Sommando gli ultimi due angoli, $\widehat{ACB} = \pi - \frac{\alpha+\beta}{2}$. Poiché α e β sono supplementari per costruzione, $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$, ossia $AC \perp BC$.

□

Esercizio 3. (14pt) Si determini una frazione che approssima $\sqrt{84}$ con un errore inferiore al millesimo.

Soluzione. Vediamo un approccio basato sull'algoritmo di Gauss (frazioni continue). Questo ci fornisce in tre passaggi

$$\sqrt{84} = [9; \overline{6, 18}]$$

da cui possiamo dedurre

$$\sqrt{84} \approx [9; 6, 18] = 9 + \frac{1}{6+\frac{1}{18}} = 9 + \frac{1}{\frac{109}{18}} = 9 + \frac{18}{109} = \frac{999}{109} = 9.1651376\ldots$$

Per le proprietà delle frazioni continue l'errore di questa approssimazione è controllato da $\frac{1}{109^2} < \frac{1}{10^4}$, che è abbondantemente più piccolo di un millesimo.

Esercizio 4. (18pt) Giustificando i passaggi, si dispongano le seguenti quantità in ordine crescente (dalla più piccola alla più grande):

$$\textbf{a)}\ \sqrt{30}-\sqrt{5} \qquad \textbf{b)}\ \sqrt{5}+1 \qquad \textbf{c)}\ \sqrt{2}+\sqrt{3}$$

Soluzione. Confrontiamo dapprima **a** e **b**, congetturando che si abbia **a**<**b**, o, equivalentemente,

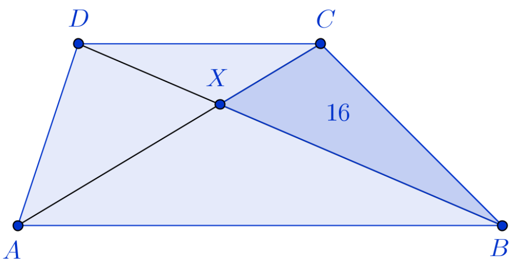
$$\sqrt{30} < 2\sqrt{5}+1 \iff 30 < (2\sqrt{5}+1)^2 = 21+4\sqrt{5} \iff 9 < 4\sqrt{5} \iff 81 < 80.$$

Poiché l'ultima disuguaglianza è falsa abbiamo **a**>**b**. Dalle approssimazioni al millesimo di $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ abbiamo che $\sqrt{5}+1 = 3.236\ldots$ e $\sqrt{2}+\sqrt{3} = 3.146\ldots$, dunque **b**>**c** e l'ordinamento crescente è $\mathbf{c} < \mathbf{b} < \mathbf{a}$.

Esercizio 5. (20pt) Un poligono regolare con 12 lati (dodecagono) è inscritto all'interno di un cerchio di raggio R. Si dimostri che l'area del dodecagono è esattamente pari a $3R^2$.

Dimostrazione. Per gli angoli presenti nella configurazione e il fatto che un esagono regolare inscritto in un cerchio di raggio R ha lato di lunghezza R, il poligono in questione può essere decomposto in 6 quadrilateri con diagonali perpendicolari di lunghezza R. Poiché in ogni quadrilatero con diagonali perpendicolari l'area è data da metà del prodotto delle lunghezze delle diagonali, l'area del dodecagono è data da $6 \cdot \frac{R^2}{2} = 3R^2$.

□



Esercizio 6. (22pt) Nel trapezio $ABCD$, con $AB \parallel CD$ e $X = AC \cap BD$, sappiamo che $AB = 2 \cdot CD$ e che l'area del triangolo XBC è 16. Quanto vale in queste ipotesi l'area dell'intero trapezio?

Soluzione. Utilizzando il punto ausiliario $E = AD \cap BC$, dal parallelismo e dalle proporzioni di AB e CD si ha che BD e AC sono mediane nel triangolo ABE, dunque X è il baricentro di ABE. Poiché il baricentro cade a $\frac{2}{3}$ di ogni mediana, confrontando triangoli con altezze congruenti si ha che

$$[XCD] : [XBC] : [XDA] : [XAB] = 1 : 2 : 2 : 4,$$

dunque le aree dei quattro triangoli indicati sono nell'ordine $8, 16, 16, 32$ e l'area dell'intero trapezio è $8 + 16 + 16 + 32 = 72$.