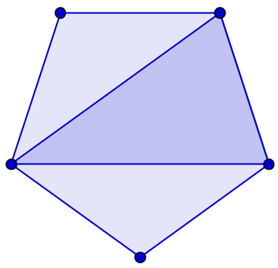
2I - Verifica 27/11/23 - Soluzioni

Esercizio 1. (12pt) Dati nel piano i punti $A(0;10), B(1;4), C(5;2), D(6,7)$ si determini l'area del quadrilatero $ABCD$ e se le diagonali AC e BD sono perpendicolari oppure no.

Soluzione. Per la formula di Gauss o il metodo della cornice l'area di $ABCD$ è pari a $27.5 = \frac{55}{2}$.
Per il Teorema di Pitagora le diagonali misurano $\sqrt{89}$ e $\sqrt{34}$, e poiché $89 \cdot 34$ non è un quadrato le diagonali **non sono** perpendicolari. In alternativa, $m_{AC} = -\frac{8}{5}$ e $m_{BD} = \frac{3}{5}$ conducono alla stessa conclusione via $m_{AC} \cdot m_{BD} \neq -1$.



Esercizio 2. (13pt) Nel piano cartesiano i punti A, B, C, D, E sono i vertici di un pentagono regolare. Che percentuale dell'area del pentagono è occupata dal triangolo ABD?

Soluzione. In un pentagono regolare il rapporto tra la lunghezza di una diagonale e quella di un lato è il rapporto aureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. I tre triangoli in figura condividono un vertice e l'ampiezza dell'angolo in tale vertice.
Da $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$ segue che la percentuale cercata è $\frac{\varphi}{\varphi+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 44.72\%$.

Esercizio 3. (14pt) Si determini la posizione dell'incentro I (centro della circonferenza inscritta, intersezione delle bisettrici) per il triangolo delimitato dalle rette $x = 0$, $y = 11$ e $y = \frac{3}{4}x - 4$.

Soluzione. È semplice capire che i lati del triangolo in questione misurano $15, 20$ e 25. Da $r = \frac{2\Delta}{a+b+c}$ segue che il raggio della circonferenza inscritta è $r = 5$, dunque l'incentro I è collocato 5 unità a destra e 5 unità in basso rispetto al vertice dell'angolo retto in $(0;11)$. Segue che la risposta è $(5;6)$.

Esercizio 4. (18pt) Si determinino le coordinate del baricentro G (punto di intersezione delle mediane) e dell'ortocentro H (punto di intersezione delle altezze) per il triangolo con vertici in $A(0;0), B(10;2), C(2;8)$.

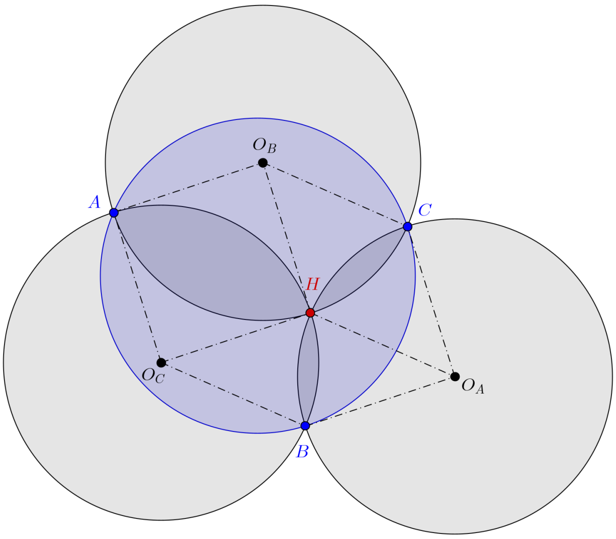
Soluzione. Da $3G = A + B + C$ segue immediatamente che il baricentro G cade in $\left(4; \frac{10}{3}\right)$.
Le pendenze dei lati uscenti da A sono rispettivamente $m_{AB} = \frac{1}{5}$ e $m_{AC} = 4$. Le altezze uscenti da C e da B hanno dunque pendenze -5 e $-\frac{1}{4}$ ed equazioni date da $y = -5(x-2)+8$ e $y = -\frac{1}{4}(x-10)+2$.
L'ortocentro H cade nell'intersezione di queste altezze, dunque le sue coordinate sono fornite dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = -5x + 18 \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}. \end{cases}$$

L'equazione $-5x + 18 = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$ è equivalente alle equazioni $-20x + 72 = -x + 18$ o $54 = 19x$.
Segue che l'ascissa dell'ortocentro è $x = \frac{54}{19}$ e l'ordinata è $y = 18 - 5x = \frac{72}{19}$.
Pertanto H è situato in $\left(\frac{54}{19}; \frac{72}{19}\right)$.

Esercizio 5 (Corollario del Teorema di Gauss-Bodenmiller)**.** (20pt) Nel piano il quadrilatero $ABCD$ ha vertici collocati $(4;0),(3;-3),(18;-6),(10;2)$. Definiti U e V come i punti di intersezione dei lati opposti, $U = AB \cap CD, V = BC \cap AD$, si verifichi che i punti medi dei segmenti AC, BD, UV sono allineati.

Soluzione. Dalla risoluzione degli opportuni sistemi o da un grafico accurato si ha che U e V cadono rispettivamente in $U(6;6)$ e $V(-2;-2)$. I punti medi dei segmenti AC, BD, UV cadono dunque in $(11;-3), \left(\frac{13}{2};-\frac{1}{2}\right)$ e $(2;2)$. Verificare l'allineamento degli ultimi tre punti è equivalente a verificare l'allineamento di $(4;4),(13;-1)$ e $(22;-6)$. Quest'ultimo è evidente in quanto nel passare da un punto al successivo abbiamo che l'ascissa aumenta di 9 mentre l'ordinata diminuisce di 5. $\square$



Esercizio 6 (Teorema di Johnson, noto in Romania come *Teorema dei 5 lei*)**.** (22pt)

Tre circonferenze di identico raggio R hanno tutte in comune il punto H e a coppie si intersecano inoltre nei vertici di un triangolo ABC, come illustrato in figura. Si dimostri che il raggio della circonferenza circoscritta ad ABC coincide con il raggio delle circonferenze iniziali.

Soluzione. Con riferimento all'illustrazione abbiamo che O_ACO_BH, HO_BAO_C e O_CBO_AH sono quadrilateri equilateri, ossia rombi.

Ciò comporta che $O_ACO_BAO_CB$ sia un esagono equilatero con lati opposti paralleli e i triangoli ABC, $O_AO_BO_C$ siano congruenti per il terzo criterio. Da $HO_A = HO_B = HO_C = R$ abbiamo che il raggio della circonferenza circoscritta ad $O_AO_BO_C$ coincide con R. Poiché $O_AO_BO_C$ e ABC sono congruenti, il raggio della circonferenza circoscritta ad ABC è anch'esso R. $\square$