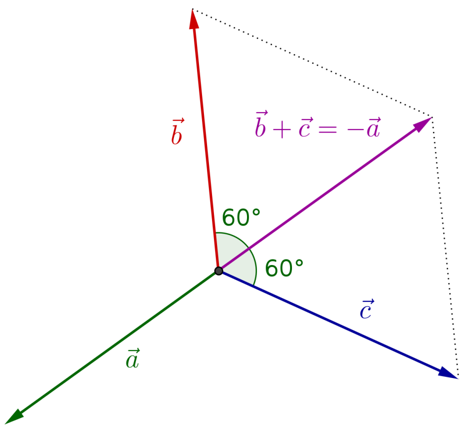
Verifica del 01/12/23 - Soluzioni

Esercizio 1. (15pt) I vettori $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ hanno coordinate $\vec{a} = (6; -3; 2)$ e $\vec{b} = (-5; 4; 3)$. Si determinino

- (**A**) le lunghezze di $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- (**B**) il prodotto scalare tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- (**C**) il prodotto vettore tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- (**D**) la lunghezza del vettore $\vec{a} + \vec{b}$
- (**E**) l'ampiezza approssimativa dell'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Soluzione. (**A**) Dal Teorema di Pitagora si ha $\|\vec{a}\| = 7$ e $\|\vec{b}\| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
(**B**) In coordinate $\vec{a} \circ \vec{b} = -30 - 12 + 6 = -36$ e (**C**) $\vec{a} \times \vec{b} = (-17; -28; 9)$.
(**D**) Il vettore $\vec{a} + \vec{b} = (1; 1; 5)$ ha modulo $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.
(**E**) Detto γ l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$, dai punti precedenti abbiamo $\cos\gamma = \frac{-36}{35\sqrt{2}} \approx -\frac{1}{\sqrt{2}}$, per cui l'ampiezza di γ si aggira attorno ai $135°$ (più accuratamente è $\approx 136°39'41''$).

Esercizio 2. (16pt) Si dimostri che se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sono vettori dello spazio con lo stesso modulo positivo e tali per cui $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, allora gli angoli tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$, tra $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e tra $\vec{c}$ e $\vec{a}$ hanno tutti ampiezza $120°$.



Dimostrazione. La relazione $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ è equivalente a $\vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$. L'ultima relazione comporta che $\pm\vec{a}$ appartenga al piano determinato da $\vec{b}$ e $\vec{c}$. A meno di riscalamenti possiamo assumere che $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ siano versori, e detto α l'angolo tra $\vec{b}$ e $\vec{c}$ osservare che $\|\vec{b} + \vec{c}\| = 2\cos\frac{\alpha}{2} = \|-\vec{a}\| = 1$. Da $2\cos\frac{\alpha}{2} = 1$ segue $\frac{\alpha}{2} = 60°$ e $\alpha = 120°$. Possiamo immediatamente concludere osservando che il problema è simmetrico nelle variabili $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, dunque $\alpha = \beta = \gamma = 120°$. $\square$

Nota: quanto provato è rilevante sia per quanto concerne il problema di Torricelli che per le reti di Steiner, per il problema di Weiszfeld o per le superfici minime.

Esercizio 3. (20pt) Dati tre generici vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, si dimostri che valgono le seguenti identità:

- (Prodotto triplo) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \circ \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \circ \vec{b})\vec{c}$,
- (Jacobi) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$.

Suggerimento: la seconda segue dalla prima. In generale, $\vec{u} \times \vec{v}$ è un vettore perpendicolare sia ad $\vec{u}$ che a $\vec{v}$ e la quantità $\vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})$ è il volume orientato della "scatola" generata da $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.
In entrambe le identità non è restrittivo supporre che almeno un vettore tra $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sia un versore della base canonica, per poi assegnare coordinate generiche agli altri due vettori.

Dimostrazione. Per la definizione fisica di prodotto vettore, $\vec{b} \times \vec{c}$ è ortogonale sia a $\vec{b}$ che a $\vec{c}$, dunque $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ appartiene al piano generato da $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Seguendo il suggerimento, possiamo assumere senza perdita di generalità che si abbia $\vec{a} = (1; 0; 0)$, $\vec{b} = (x; y; z)$ e $\vec{c} = (X; Y; Z)$, da cui seguono $\vec{b} \times \vec{c} = (yZ - Yz; zX - Zx; xY - Xy)$ e $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (0; Xy - xY; Xz - xZ)$. Poiché $\vec{a} \circ \vec{b} = x$ e $\vec{a} \circ \vec{c} = X$, per provare il primo punto non resta che verificare che le coordinate di $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ coincidono con quelle di $X\vec{b} - x\vec{c}$, che è immediato. Una volta dimostrata la prima identità, permutando ciclicamente le variabili si ottengono

$$\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{b} \circ \vec{a})\vec{c} - (\vec{b} \circ \vec{c})\vec{a}, \qquad \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \circ \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \circ \vec{a})\vec{b}.$$

Sommando membro a membro i tre prodotti tripli considerati, dalla commutatività del prodotto scalare si ha cancellazione totale, sufficiente a dimostrare l'identità di Jacobi.

$\square$

Nota: quanto dimostrato è rilevante sia in geometria differenziale che nell'ambito della meccanica lagrangiana o hamiltoniana.