Verifica del 26/01/24 - Soluzioni

Esercizio 1. (15pt) L'automobile di James Dean precipita da una rupe alta $60\,m$ e finisce con lo schiantarsi in mare. Sapendo che all'impatto con l'acqua l'auto forma un angolo di $60°$ con il piano orizzontale, che velocità aveva l'auto al momento del "decollo" dalla rupe?

Soluzione. Mandando alla rovescia il tempo, possiamo chiederci quale velocità iniziale $\vec{w}$, inclinata di $60°$ rispetto all'orizzonte, permette di avere un moto parabolico con elevazione pari a $60\,m$. Questo conduce all'equazione $\frac{w^2}{2g}\sin^2(60°) = 60\,m$, da cui $w = 40\,m/s$. Segue che nell'apice della traiettoria la velocità dell'auto di James Dean è $40\frac{m}{s}\cdot\cos(60°) = 20\,m/s = 72\,Km/h$.

Esercizio 2. (16pt) Lungo un rettilineo in pianura abbiamo un Jack puntiforme, immobile rispetto alla strada, e un carrello puntiforme, inizialmente posto a $10\,m$ da Jack e che viaggia verso Jack alla velocità di $2\,m/s$. Nell'istante iniziale Jack lancia un aeroplanino, anch'esso puntiforme, con velocità di decollo $4\,m/s$ e angolo non nullo rispetto alla strada. Può Jack centrare il carrello? In caso affermativo, lanciando come? **Nota**: nel caso ci sia più di una soluzione, descrivetele tutte.

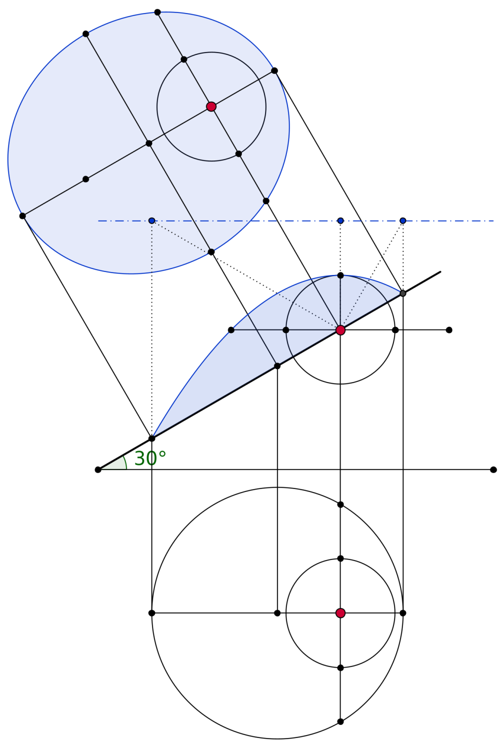
Soluzione. Per un certo angolo di lancio α rispetto al rettilineo, vogliamo che la somma tra la gittata dell'aeroplanino e lo spazio percorso dal carrello durante il tempo di volo sia pari a $10\,m$. Questo conduce all'equazione

$$\frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha) + \frac{2v_0}{g}\sin(\alpha)\cdot(2\,m/s) = 10\,m$$

equivalente a

$$\sin(2\alpha) + \sin(\alpha) = \frac{25}{4},$$

che è evidentemente impossibile, il quanto il membro sinistro è al più 2 mentre il membro destro è > 6. In alternativa, possiamo considerare che il massimo tempo di volo è $\frac{2v_0}{g} = 0.8\,s$, e durante questo tempo il carrello copre $1.6\,m$ mentre l'aeroplanino ne copre al massimo altrettanti, poiché $\frac{v_0^2}{g} = 1.6\,m$. Segue che Jack non può centrare il carrello, neppure lanciando l'aeroplanino alle sue spalle.



Esercizio 3. (20pt) Un irrigatore da giardino si trova nel mezzo di un orto, e spruzza acqua in tutte le direzioni alla velocità di $2\,m/s$. L'orto non si trova in pianura, ma sulle pendici di una collina, e forma un angolo di $30°$ con il piano orizzontale. Che forma e dimensioni ha la parte di terreno che risulta effettivamente bagnata dall'irrigatore?

Soluzione. Fissiamo un riferimento spaziale in cui l'irrigatore si trova nell'origine e il piano su cui giace l'orto ha equazione $z = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Per quanto visto a lezione la parte di spazio bagnata dall'irrigatore è un paraboloide di rotazione, di equazione $z = \beta - \alpha(x^2+y^2)$ per opportune costanti positive α e β. Mettendo a sistema le ultime due equazioni abbiamo che la proiezione sul piano xy del suolo bagnato è un cerchio. Il piano d'azione è ora trovarne il diametro, per poi concludere riguardo l'area dell'*ellisse* che corrisponde alla porzione di suolo effettivamente bagnata.

Come ulteriore semplificazione, fissiamo l'unità di misura delle lunghezze a $\frac{v_0^2}{2g}$, che per la teoria è la massima coordinata z raggiunta dalle gocce. Nel piano xz abbiamo dunque un segmento parabolico delimitato da $z = 1 - \frac{x^2}{4}$ e da $z = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Le ascisse degli estremi della corda del segmento parabolico corrispondono alle soluzioni di $1 - \frac{x^2}{4} = \frac{x}{\sqrt{3}}$, ossia $x = -2\sqrt{3}$ e $x = \frac{2}{3}$. La semidifferenza di queste ascisse, ossia $\frac{4}{\sqrt{3}}$, è il raggio del cerchio nel piano xy. Segue che l'ultimo cerchio ha area $\frac{16\pi}{3}\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2$.
La proiezione dal piano dell'orto sul piano xy non modifica la coordinata y ma contrae la coordinata x di un fattore $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$: segue che l'area dell'ellisse che corrisponde al suolo bagnato è data da

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{16\pi}{3}\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2 = \frac{32\pi}{75\sqrt{3}}\, m^2 \approx 0.774\, m^2.$$