Verifica del 23/10/23 - Soluzioni

Esercizio 1. (10pt)

- **(a)** In un moto rettilineo si ha $s(t) = 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 2\frac{m}{s} \cdot t$.
  Si determinino le espressioni di $v(t) = \dot{s}(t)$ e di $a(t) = \dot{v}(t)$.

- **(b)** In un moto rettilineo con posizione e velocità iniziali nulle si ha $a(t) = 2\frac{m}{s^2} - 1\frac{m}{s^3} \cdot t$.
  Si determino le espressioni di $v(t)$ e $s(t)$.

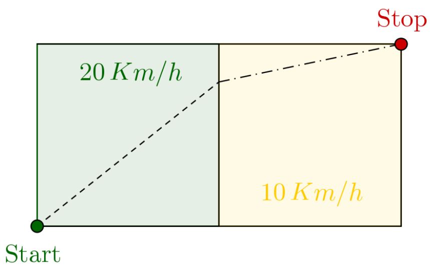
Soluzione. Rimuoviamo temporaneamente le unità di misura, per re-inserirle in fondo.
Dalle definizioni di velocità e accelerazione, e da $\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}$, abbiamo che
(a) Da $s(t) = t^2 + 2t$ seguono $v(t) = 2t + 2$ e $a(t) = 2$.
(b) Da $a(t) = 2 - t$ seguono $v(t) = 2t - \frac{t^2}{2}$ e $s(t) = t^2 - \frac{t^3}{6}$.
Nel re-inserimento delle unità di misura seguiamo il principio per cui ogni lunghezza si misura in m, ogni velocità in $\frac{m}{s}$ e ogni accelerazione in $\frac{m}{s^2}$.

Esercizio 2. (16pt) Un punto materiale, inizialmente fermo, precipita da una rupe alta $H = 100\,m$ per l'effetto di un'accelerazione $g = 10\frac{m}{s^2}$.

- **(a)** Che velocità ha l'oggetto quando si trova a metà della traiettoria?

- **(b)** Che velocità ha l'oggetto quando è trascorso metà del tempo di caduta dall'istante iniziale?

Soluzione. Nell'opportuno riferimento abbiamo $a(t) = g$, $v(t) = gt$ e $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$. Il tempo di caduta T è fissato da $\frac{1}{2}gT^2 = H$, da cui $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Il tempo τ che permette di raggiungere il punto medio della traiettoria è fissato da $\frac{1}{2}g\tau^2 = \frac{1}{2}H$, da cui $\tau = \sqrt{\frac{H}{g}} = \frac{1}{\sqrt{2}}T$. La velocità terminale è $gT = \sqrt{2Hg}$, e per diretta proporzionalità tra velocità e tempo abbiamo che la risposta al punto **(a)** è $\sqrt{Hg}$ mentre la risposta al punto **(b)** è $\sqrt{Hg/2}$. Numericamente $v_a \approx 31.62\frac{m}{s}$ e $v_b \approx 22.36\frac{m}{s}$.



Esercizio 3.(24pt) Il rettangolo in figura rappresenta un terreno agricolo di larghezza $100\,m$ e altezza $50\,m$. Un mezzo agricolo deve andare dal vertice etichettato con **Start** a quello etichettato con **Stop** nel minor tempo possibile. Le caratteristiche del terreno sono tali per cui la velocità massima del mezzo nella parte sinistra è $20\,\frac{Km}{h}$ e la velocità massima del mezzo nella parte destra è $10\,\frac{Km}{h}$. Si fornisca una stima accurata del minimo tempo di percorrenza, espresso in secondi.

Soluzione. Per comodità, supponiamo che $50\,m$ siano l'unità di misura delle lunghezze e $10\,\frac{Km}{h}$ siano l'unità di misura delle velocità. Sia nella parte sinistra che in quella destra del terreno le geodetiche (ossia le curve di minima lunghezze) sono segmenti, dunque il tragitto di minima durata è una spezzata, univocamente determinata dalla posizione del suo vertice intermedio. Nel sistema di riferimento in cui l'origine è il punto di partenza e $(2;1)$ è il punto d'arrivo, denominiamo $y \in [0,1]$ l'ordinata del vertice intermedio. Per il teorema di Pitagora il tempo di percorrenza è dato da

$$T(y) = \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+(1-y)^2}$$

e il problema è così ricondotto a determinare il punto o il valore di minimo di $T(y)$ su $[0,1]$.
Questo problema è matematicamente equivalente a determinare l'unica soluzione reale di un'equazione di terzo grado: numericamente (tramite metodo di bisezione, metodo delle tangenti o approssimanti di Padé) si ha che la y che realizza il minimo è estremamente vicina a 0.7. Il minimo tempo di percorrenza è dunque dato da

$$\approx \left(\frac{\sqrt{109}}{10} + \frac{\sqrt{149}}{20}\right) \cdot \frac{50\,m}{10\,\frac{Km}{h}} \approx 29.78\,s$$

che non è molto diverso dal tempo che si impiega nel procedere in linea retta dal punto di partenza al punto d'arrivo ($\approx 30.19\,s$). Vedremo in futuro come questo problema sia strettamente correlato alle meccaniche di riflessione o rifrazione della luce, in particolare alla *legge di Snell*.