

4I - Verifica del 20/10/23 - Soluzioni

Esercizio 1. (10pt)

- (a) In un moto rettilineo si ha $s(t) = (t + |1 - t|) \cdot 5 \frac{m}{s}$.
Come mai questa situazione non è fisicamente ragionevole?
- (b) In un moto rettilineo con posizione e velocità iniziali nulle si ha $a(t) = 2 \frac{m}{s^2} - 1 \frac{m}{s^3} \cdot t$.
Si determinino le espressioni di $v(t)$ e $s(t)$.

Soluzione. (a) Lasciando sottointese le unità di misura standard, abbiamo che $s(t) = 5(t + |1 - t|)$ coincide con 5 per $t \leq 1$ e coincide con $10t - 5$ per $t \geq 1$. Nonostante $s(t)$ sia una funzione continua, la velocità $v(t)$ in corrispondenza del tempo $t = 1$ passa immediatamente dal valere 0 al valere 10. Ciò corrisponde ad una **accelerazione istantanea infinita**, che non è fisicamente ragionevole.

(b) Lasciando sottointese le unità di misura standard, dalle ipotesi e dalle meccaniche di integrazione dei polinomi si hanno $v(t) = 2t - \frac{t^2}{2}$ e $s(t) = t^2 - \frac{t^3}{6}$.

Esercizio 2. (16pt) Sapendo che

- La massa della Terra è circa $6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$
- La costante di gravitazione universale vale circa $6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{\text{Kg} \cdot s^2}$
- Il raggio terrestre è circa 6370 Km
- La Luna compie una rotazione completa attorno alla Terra in 27.3 giorni

quanto misura il diametro dell'orbita lunare, espresso in raggi terrestri?

Soluzione. La terza legge di Keplero applicata al sistema Terra-Luna fornisce la relazione $GMT^2 = 4\pi^2 a^3$, dove G è la costante di gravitazione universale, M è la massa della Terra e a è il semiasse maggiore dell'orbita lunare. Segue

$$a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

ed effettuate le sostituzioni del caso si ha che il diametro dell'orbita lunare è di circa **120.4** raggi terrestri.

Esercizio 3. (24pt) Il 9 novembre 2001 la cometa P/2001-Q6 è stata avvistata al perielio a 1.4 unità astronomiche dal Sole, su un'orbita di eccentricità $e = 0.83$. Sapendo che una unità astronomica (ua) corrisponde grossomodo al semiasse maggiore dell'orbita terrestre, si deducano

- (a) La lunghezza in unità astronomiche del semiasse minore dell'orbita
- (b) La velocità areolare della cometa, espressa in ua^2/anno
- (c) La probabile data in cui la cometa transiterà nuovamente dal perielio.

Soluzione. Per comodità modifichiamo localmente le unità di misura di tempi e lunghezze, misurando i tempi in anni e le lunghezze in unità astronomiche. Con queste convenzioni la terza legge di Keplero applicata al sistema Sole-Terra fornisce $GM_{\text{Sole}} = 4\pi^2 \frac{\text{ua}^3}{\text{anno}^2}$. Per le relazioni tra le lunghezze caratteristiche di un'orbita ellittica abbiamo

$$d = a - c = a(1 - e), \quad a = \frac{d}{1 - e} \approx 8.235 \text{ ua}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2}$$

dunque la risposta al punto **(a)** è data da $b = d\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \approx 4.593 \text{ ua}$. Le terza legge di Keplero fissa il periodo orbitale attraverso

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_{\text{Sole}}}} \approx \sqrt{8.235^3} \text{ anni} \approx 23 \text{ anni } 231 \text{ giorni}$$

da cui è possibile prevedere che il prossimo passaggio al perielio avvenga il **(c) 28 giugno 2024**. Note le caratteristiche dell'orbita e noto il periodo, la velocità areolare richiesta nel punto **(b)** può essere facilmente calcolata attraverso

$$L = \frac{\pi ab}{T} \approx 5.028 \frac{\text{ua}^2}{\text{anno}}.$$

<https://www.spacereference.org/comet/p-2001-q6-neat> fornisce la collocazione attuale della cometa. Il prossimo passaggio al perielio avverrà effettivamente il 20 giugno 2024.
