Diretta proporzionalità

Due grandezze sono **direttamente proporzionali** se è costante il loro quoziente.
Scriviamo equivalentemente $A \propto B$, $A = kB$, $k = A/B$ e denominiamo k **costante di proporzionalità**. Assumendo che B sia la variabile indipendente e A quella dipendente, il grafico della relazione $A = f(B) = kB$ è dato da una **retta per l'origine**, il cui coefficiente angolare (pendenza) è proprio k.

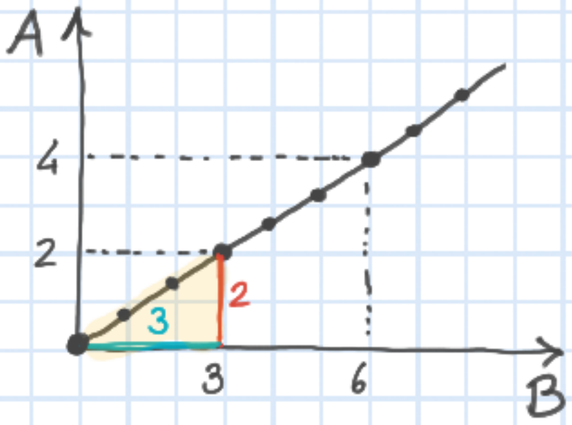


Grafico di

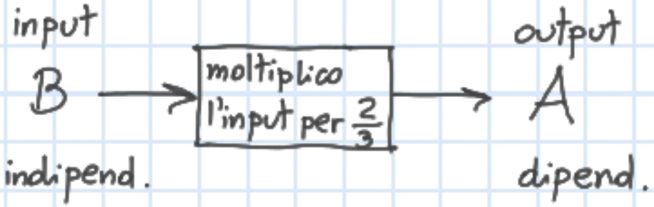
$$A = \frac{2}{3} B$$

$k = 2/3$ è la pendenza della retta per l'origine

Tabella associata

B	A
1	2/3
2	4/3
3	2
4	8/3
5	10/3
6	2
7	14/3

Rappresentazione "informatica" della relazione tra B e A



È importante prendere confidenza con questi modi diversi di presentare lo stesso concetto, e all'occorrenza saper passare dall'uno all'altro.

Dipendenze lineare

Diciamo che tra A e B sussiste una **dipendenza lineare** se $A = mB + q$.

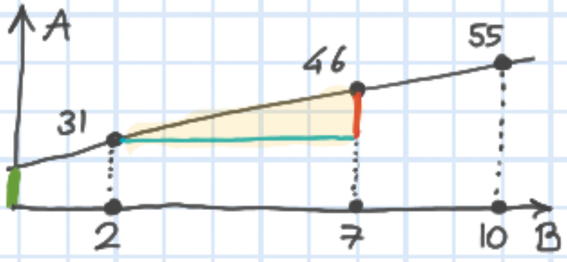
Il grafico di tale relazione è ancora una retta, ma non necessariamente per l'origine.

La **pendenza** m è data da $\Delta A / \Delta B$ (scarto nelle ordinate fratto scarto nelle ascisse) per qualunque coppia di punti appartenenti al grafico. L'**ordinata all'origine** q (anche detta intercetta) è il valore della variabile dipendente quando quella indipendente vale 0.

Una qualunque coppia di punti sulla retta fissa i valori di m e q, dunque l'equazione dell'intera retta. Vediamo come.

Esempio. B numero di caramelle, A massa indicata da una bilancia starata.

B	A in g
2	31
7	46
10	55

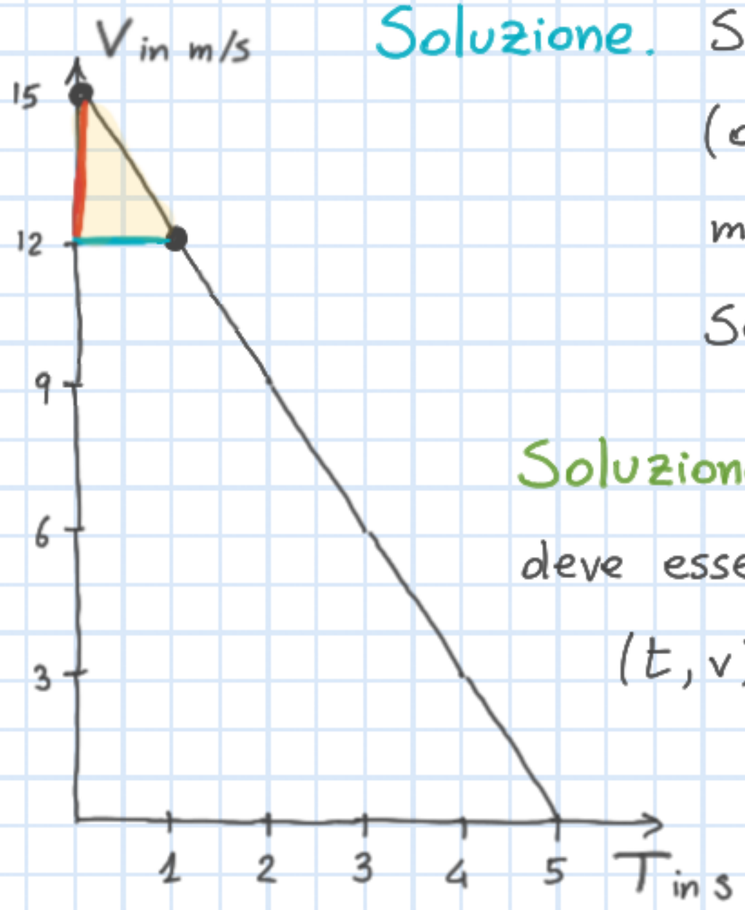


m è data da $(46-31)/(7-2) = 3$, dunque ogni caramella ha massa 3g.

Segue che q in grammi vale $(31 - 2 \cdot 3) = 25$.

La massa in g di B caramelle indicata dalla bilancia è dunque $3B + 25$.

Esempio. Un motorino in frenata ha inizialmente velocità 15 m/s e dopo 1 s ha velocità uguale a 12 m/s. In quanto tempo si ferma?



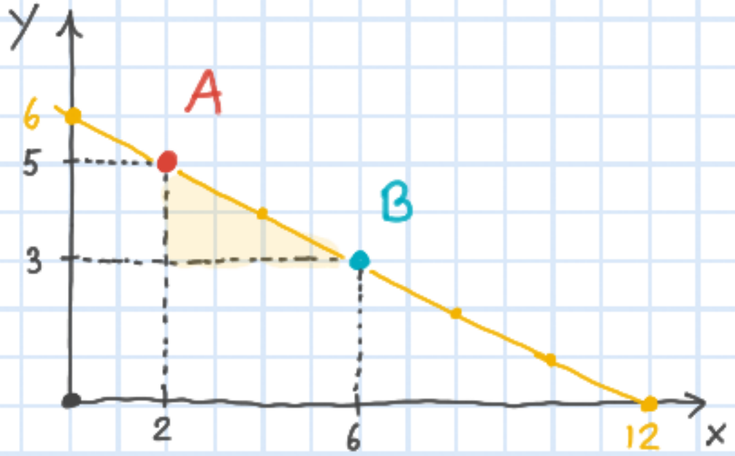
Soluzione. Supponendo che ci sia dipendenza lineare tra v e t (ossia che la frenata sia uniforme) la velocità del motorino diminuisce di 3 m/s ogni secondo.
Segue che a 5 s dall'istante iniziale il motorino è fermo.

Soluzione alternativa via equazioni. La relazione $v(t) = kt + q$ deve essere soddisfatta sia da $(t, v) = (0\,s, 15\,m/s)$ che da $(t, v) = (1\,s, 12\,m/s)$. Rimuovendo le unità di misura,

$$15 = k \cdot 0 + q \quad e \quad 12 = k \cdot 1 + q \,, \quad \text{da cui} \quad k = -3$$

e $q = 15$, cioè $v(t) = 15\,\frac{m}{s} - t \cdot 3\,\frac{m}{s^2}$, che si annulla solo per $t = 5\,s$.

Esercizio. Una retta nel piano passa da $A(2;5)$ e $B(6;3)$. Dove taglia gli assi?



Approccio #1, proporzioni. Nell'andare da A in B, ogni 2 quadretti percorsi verso destra ne percorriamo 1 verso il basso. Proseguendo in questa "andatura" verso destra o sinistra troviamo facilmente le intersezioni con gli assi.

Approccio #2, equazioni. L'equazione di AB è $y = mx+q$ e la pendenza m è data da $(y_B - y_A)/(x_B - x_A) = -\frac{1}{2}$, dunque $y = -\frac{1}{2}x + q$.
Questa retta passa da $A(2;5)$, dunque $y_A = -\frac{1}{2}x_A + q$ e $q = y_A + \frac{1}{2}x_A = 5+1 = 6$.
La retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + 6$ taglia l'asse x laddove $y=0$, cioè per $x = 12$.

Generalizzazione. Se A e B hanno ascisse distinte, la retta AB ha equazione

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,x + \frac{y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A}$$

cioè realizza $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, $q = \dfrac{y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A}$

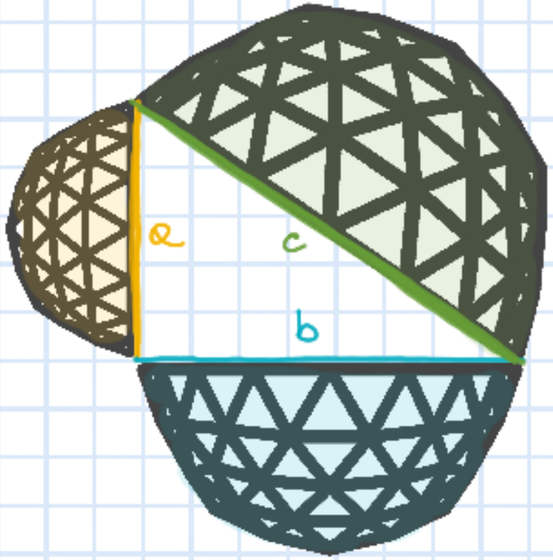
Proporzionalità inversa

Due grandezze A, B sono **inversamente proporzionali** se è costante il loro prodotto, ossia, equivalentemente, $AB = k$, $A = k/B$, $B = k/A$. Il grafico delle coppie $(A; B)$ o delle coppie $(B; A)$ è un ramo di **iperbole equilatera**. Possiamo esprimere la prop. inversa anche come $A \propto \frac{1}{B}$ o $B \propto \frac{1}{A}$.

Esercizio. Per un gas ideale, a parità di massa abbiamo che il volume V e la densità d sono inversamente proporzionali. Se a volume $V = 3\,\ell$ corrisponde densità $d = 2\,g/\ell$, quale densità corrisponde ad un volume di $4\,\ell$?

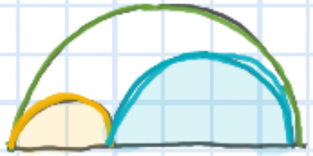
Soluzione. In partenza la massa M è data da $M = Vd = 6\,g$. Per conservazione di M la densità finale è $6\,g / 4\,\ell = 1.5\,g/\ell$.

Approfondimento : Principio di scala e applicazioni

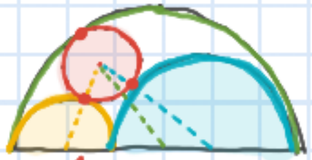


Se sui lati di un triangolo rettangolo costruiamo figure simili (non importa di quale forma) l'area della più grande è la somma delle aree delle più piccole. Infatti per ragioni dimensionali l'area della figura costruita sul lato di lunghezza ℓ è $K\ell^2$ con K dipendente dalla forma ($K=1$ per il quadrato, $K=\sqrt{3}/4$ per il triangolo equilatero, $K=\pi/8$ per il semicerchio), ma, indipendentemente dalla forma, il Teorema di Pitagora ($c^2 = a^2 + b^2$) assicura $Kc^2 = Ka^2 + Kb^2$.

Configurazioni "storiche" che hanno a che fare con questa faccenda sono le lunule di Ippocrate e l'arbelos di Archimede.



Ippocrate



Archimede

Proporzionalità quadratica e radicale

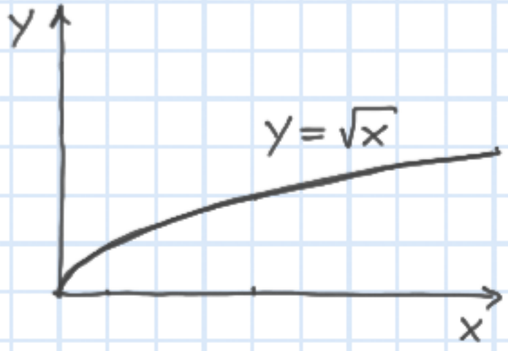
La proporzionalità **quadratica** diretta tra A e B è espressa da

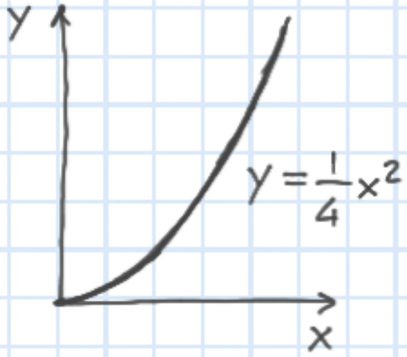
$$A \propto B^2 \,, \qquad A = kB^2 \,, \qquad k = A/B^2$$

mentre la proporzionalità **radicale** tra A e B è espressa da

$$A \propto \sqrt{B} \,, \qquad A = k\sqrt{B} \,, \qquad k^2 = A^2/B.$$

In questi casi il grafico di A come funzione di B è dato da un arco di parabola, con asse orizzontale nel caso $A = k\sqrt{B}$ e con asse verticale nel caso $A = kB^2$.





Esempio classico. Per un corpo inizialmente fermo che cade da altezza H in assenza d'attrito, detto T il tempo di caduta e V la velocità all'impatto si ha

$$T \propto \sqrt{H} \,, \quad V \propto \sqrt{H} \,, \quad H \propto T^2 \,, \quad H \propto V^2 \,.$$

Ovviamente quelle esposte non esauriscono **tutte** le possibili relazioni tra variabile indipendente e variabile dipendente, rappresentano soltanto le più semplici. La realtà (non solo in ambito fisico) ha la tendenza ad essere ben più complessa delle congetture iniziali di chi la studia.