Fisica classi 1ᵉ

Una nota su cancellazione numerica ed errore algoritmico..

Prequel: la propagazione dell'errore in misure indirette è regolata da quanto riportato in tabella. Indichiamo con $\bar{a} = (\max a + \min a)/2$ la misura principale, con $\Delta a = (\max a - \min a)/2$ l'incertezza assoluta e con $\mathrm{rel}(a) = \Delta a / \bar{a}$ l'incertezza relativa.

Operaz	Propagaz. errore
$+$	si sommano gli errori assoluti
$-$	si sommano gli errori assoluti
$\times$	si sommano gli errori relativi
$/$	si sommano gli errori relativi
$\sqrt{\ }$	si dimezza l'errore relativo

Esercizio. Per una legge fisica $A = B - C$, dove misurazioni dirette forniscono $B = 60$ e $C = 48$ con errori relativi del 2%. Qual è l'errore relativo su A?

Svolgimento. Come da definizioni e da tabella si ha $\Delta B = 2\% B = 1{,}2$ e $\Delta C = 2\% C = 0{,}96$, da cui $\Delta(B-C) = \Delta B + \Delta C = 1{,}2 + 0{,}96 = 2{,}16$. Poiché $\bar{A} = \bar{B} - \bar{C} = 60 - 48 = 12$, si ha $\mathrm{rel}(A) = 2{,}16/12 = 0{,}18 = 18\%$.

Cancellazione numerica Nelle operazioni di addizione e moltiplicazione l'errore si propaga dai dati sperimentali alle misure indirette, ma in maniera controllata. Nella sottrazione di quantità affette da errore (specie se vicine tra loro) può invece capitare che l'errore esplode incontrollatamente, come visto nel precedente esercizio, e come giustificato da

$$\mathrm{rel}(A-B) = \frac{\Delta A + \Delta B}{A-B} = \frac{A}{A-B}\,\mathrm{rel}(A) + \frac{B}{A-B}\,\mathrm{rel}(B),$$

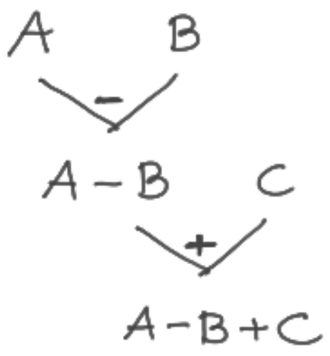
dove il termine destro può essere arbitrariamente più grande sia di rel(A) che di rel(B).

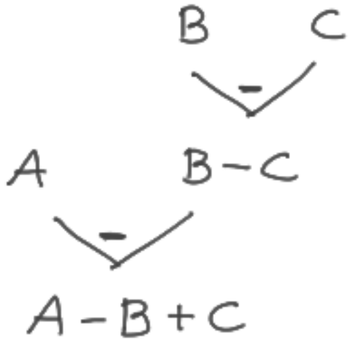
Conseguenza: l'operazione di sottrazione è decisamente più spinosa, dal punto di vista della propagazione dell'errore, rispetto alle altre. Avendone la possibilità tecnica è opportuno evitarla.

Errore algoritmico.

La medesima espressione matematica/fisica, specie se questa coinvolge molte variabili, può essere materialmente calcolata in molti modi. Ad esempio $(A-B)+C = A-(B-C)$, dunque gli alberi rappresentati di seguito producono lo stesso output a partire dagli stessi input:

Albero α





Albero β

Ma se gli input sono affetti da errore, è vero oppure no che i due alberi accumulano il medesimo errore sull'output? In generale **NO**. In particolare una potenziale fonte d'errore risiede anche nell'albero (di computazione) che scegliamo per passare dalle misure dirette a quelle indirette.

Mettiamo a confronto i precedenti due alberi per $A = 5$, $B = 10$, $C = 8$, tutti affetti da un errore relativo dell'1%.

Albero α: $\Delta A = 0{,}05$ $\Delta B = 0{,}10$ $\Delta C = 0{,}08$

$A - B = -5 \pm 0{,}15$

$(A-B)+C = 3 \pm 0{,}23$ **Errore relativo finale:** $0{,}23/3 \approx 8\%$

Albero β: $\Delta A = 0{,}05$ $\Delta B = 0{,}10$ $\Delta C = 0{,}08$

$B - C = 2 \pm 0{,}18$

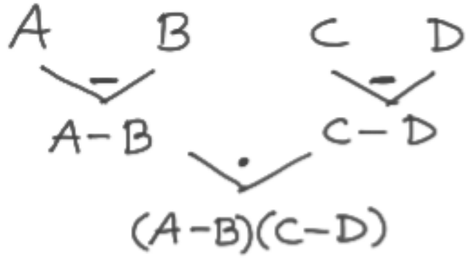
$A-(B-C) = 3 \pm 0{,}23$ **Errore relativo finale:** lo stesso di prima.

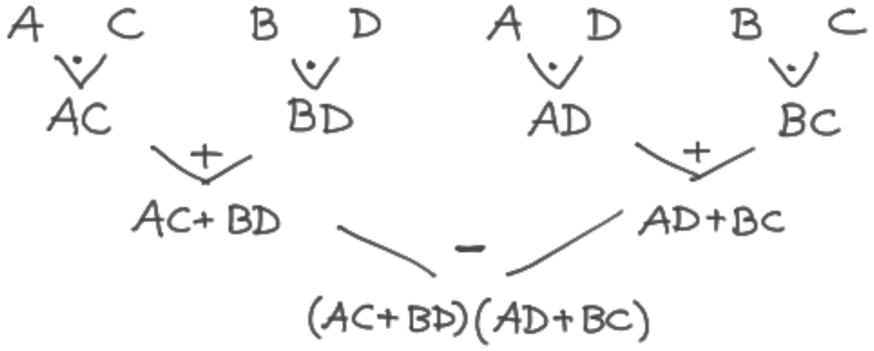
In questo caso i due approcci sono equivalenti dal punto di vista della propagazione dell'errore, ma come già anticipato in generale le cose non stanno così.

Vediamo un ulteriore esempio nella prossima slide.

Mettiamo a confronto i seguenti due alberi di calcolo di $(A-B)(C-D) = (AC+BD) - (AD+BC)$, sui dati iniziali $A = 10$, $B = 8$, $C = 6$, $D = 5$, tutti affetti da un errore relativo dell'1%.

Albero α
3 operazioni





Albero β
7 operazioni

Per entrambi gli alberi abbiamo $\Delta A = 0{,}10$ $\Delta B = 0{,}08$ $\Delta C = 0{,}06$ e $\Delta D = 0{,}05$.

Albero α : $A-B = 2 \pm 0{,}18$ $C-D = 1 \pm 0{,}11$ $\mathrm{rel}(A-B) = 9\%$ $\mathrm{rel}(C-D) = 11\%$

dunque l'errore relativo sull'output è **20%**

Albero β : $\mathrm{rel}(AC) = \mathrm{rel}(BD) = \mathrm{rel}(AD) = \mathrm{rel}(BC) = 2\%$, $AC = 60 \pm 1{,}2$ $BD = 40 \pm 0{,}8$

$AD = 50 \pm 1$ $BC = 48 \pm 0{,}96$ da cui $AC+BD = 100 \pm 2$ e $AD+BC = 98 \pm 1{,}96$.

Da $\mathrm{rel}(AC+BD) = \mathrm{rel}(AD+BC) = 2\%$ segue che l'errore relativo sull'output

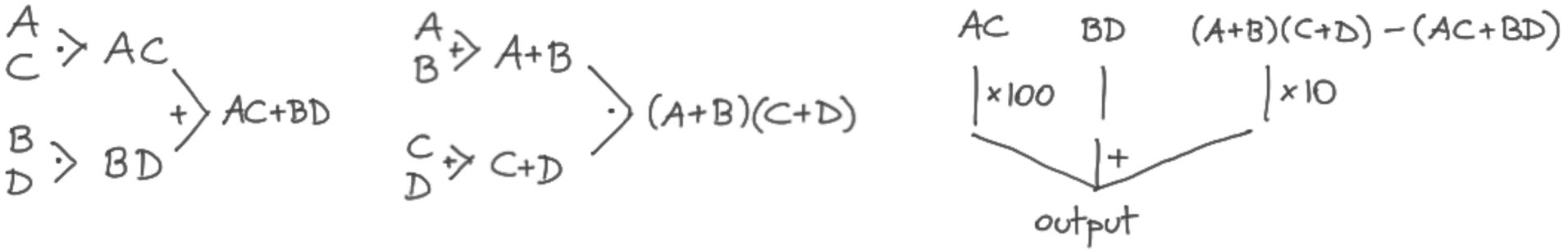
è solo il **4%**, molto meglio che nel caso precedente. (Nonostante $7 > 3$)

Approfondimento: Algoritmo di Karatsuba. La moltiplicazione tra $10A+B$ e $10C+D$ può essere eseguita utilizzando solo 3 prodotti:

$$
\begin{aligned}
(10A+B)(10C+D) &= 100\,\overset{1^\circ}{AC} + \overset{2^\circ}{BD} + 10\,(\overset{3^\circ}{AD} + \overset{4^\circ}{BC}) \\
&= 100\,\underset{1^\circ}{AC} + \underset{2^\circ}{BD} + 10\,\big(\underset{3^\circ}{(A+B)(C+D)} - AC - BD\big)
\end{aligned}
$$

Esercizio. Si mettano a confronto l'algoritmo di Karatsuba e quello standard, dal punto di vista della propagazione dell'errore, nella moltiplicazione tra 23 e 17, supponendo che ogni cifra in partenza sia affetta da un errore relativo dell'1%.

Karatsuba



Svolgimento. Abbiamo $(A,B,C,D) = (2,3,1,7)$ con $(\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D) = (0.02, 0.03, 0.01, 0.07)$

Algoritmo standard $\mathrm{rel}(AC) = \mathrm{rel}(BD) = \mathrm{rel}(AD) = \mathrm{rel}(BC) = 2\%$ da cui

$AC = 2 \pm 0.04$ $\quad BD = 21 \pm 0.42$ $\quad AD = 14 \pm 0.28$ $\quad BC = 3 \pm 0.06$ $\quad AD + BC = 17 \pm 0.34$

e $100\,AC = 200 \pm 4$, $10(AD+BC) = 170 \pm 3.4$, $BD = 21 \pm 0.42$ e l'output è

391 ± 7.82, che ha un errore relativo del 2%.

Algoritmo di Karatsuba Come prima $AC = 2 \pm 0.04$ e $BD = 21 \pm 0.42$. Valgono

$A+B = 5 \pm 0.05$ e $C+D = 8 \pm 0.8$, dunque $(A+B)(C+D) = 40 \pm 0.8$.

$(AC+BD) = 23 \pm 0.46$, dunque $(A+B)(C+D) - (AC+BD) = 17 \pm 1.26$ e l'output è

$$100\,AC + 10\big((A+B)(C+D) - (AC+BD)\big) + BD = (200 \pm 4) + (170 \pm 12.6) + (21 \pm 0.42),$$

cioè 391 ± 17.02, che ha un errore relativo pari a circa il 4.35%.

Conclusione: Karatsuba è più veloce dell'algoritmo standard ma è anche meno preciso, principalmente a causa del fenomeno di cancellazione numerica.

Esercizio Mettere a confronto $(A^3 - B^3)$ e $(A-B)(A^2+AB+B^2)$ per $A=6$, $B=1$ affetti da errori relativi del 3%.

Algoritmo 1. A^3 e B^3 sono affetti da errori relativi del 9%, da cui

$A^3 = 216 \pm 19.44 \quad B^3 = 1 \pm 0.09$ e $A^3 - B^3 = 215 \pm 19.53$,

su cui grava un errore relativo $\approx 9.08\%$

Algoritmo 2. $A = 6 \pm 0.18 \quad B = 1 \pm 0.03$ danno luogo a

$A - B = 5 \pm 0.21 \quad A^2 = 36 \pm 2.16 \quad AB = 6 \pm 0.36 \quad B^2 = 1 \pm 0.06$

$A^2 + AB + B^2 = 43 \pm 2.58$. L'errore relativo sull'output è dunque

$$\mathrm{rel}(A-B) + \mathrm{rel}(A^2+AB+B^2) = \frac{0.21}{5} + \frac{2.58}{43} = 0.042 + 0.06 = 10.2\%$$

Come prevedibile l'errore relativo finale è circa il triplo di quello di partenza e il fenomeno di cancellazione numerica si fa sentire più forte in $A-B$ che in $A^3 - B^3$.

Extra Cosa accade per $(A^6 - B^6)/(A^3 + B^3)$?

Esercizio (perché dell'approssimare più volte) Per calcolare $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7}$ Pm fa quanto segue: converte ogni frazione in decimale, buttando a mare tutte le cifre dei millesimi in poi; esegue le moltiplicazioni da sinistra verso destra, buttando a mare tutte le cifre dei millesimi in poi nei risultati parziali. Alla fine, di quanto si discosta (in termini assoluti e relativi) il risultato di Michele da quello corretto?

Michele scriverebbe $1{,}5 \cdot 1{,}33 = 1{,}99$ $1{,}99 \cdot 1{,}25 = 2{,}48$ $2{,}48 \cdot 1{,}2 = 2{,}97$ $2{,}97 \cdot 1{,}16 = 3{,}44$ e $3{,}44 \cdot 1{,}14 = 3{,}92$, spacciando per uguaglianze cose che non lo sono e sottostimando il risultato corretto (cioè 4) del **2%**.

To be learned: nella risoluzione di esercizi di Fisica (e non solo) è bene procedere simbolicamente e rimpiazzare lettere con numeri solo in fondo. Le semplificazioni sono evidenti simbolicamente, ma numericamente possono condurre all'accumulazione di errori significativi.