Fisica 3C

- Definizioni e proprietà di sin, cos, tan, valori per angoli "speciali"
  funzione arctan

- Coordinate cartesiane e polari $\quad x = \rho \cos\theta \,, \quad y = \rho \sin\theta$
  $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \,, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$ (nel 1° e 4° quadrante)

- Derivata e retta tangente. Definizioni e notazioni di Lagrange, Newton, Leibniz, Eulero.

$$\begin{tikzcd} s(t) \arrow[r, bend left, "d/dt"] & v(t) \arrow[l, bend left, "\int dt"] \arrow[r, bend left, "d/dt"] & a(t) \arrow[l, bend left, "\int dt"] \end{tikzcd}$$

$\longrightarrow$ derivazione, determinazione di retta tangente

$\longleftarrow$ integrazione, determinazione di area del sottografico

Proprietà dell'operatore $\frac{d}{dt}$: additività $(f+g)' = f' + g'$ regola di Leibniz $(fg)' = f'g + fg'$

chain rule $(f(g))' = g' \cdot f'(g)$

applicazione ai monomi generalizzati $\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$

Moto rettilineo uniforme

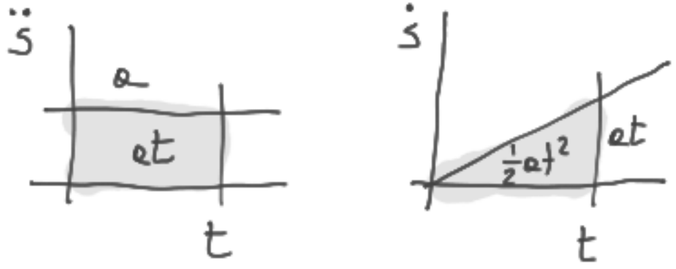
Se $s(0) = 0$

$$\begin{cases} \ddot{s} = 0 \\ \dot{s} = v = v_0 \\ s = vt \end{cases}$$

Moto uniformemente accelerato

Se $s(0) = v(0) = 0$

$$\begin{cases} \ddot{s} = a \\ \dot{s} = v = at \\ s = \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$



Osservazione (cons. energia meccanica)

c'è un legame ben preciso tra Δs e $\Delta(v^2)$.

$$2a\,\Delta s = 2a\left(s(t_2) - s(t_1)\right)$$

$$= 2a\left(v_0(t_2-t_1) + \frac{1}{2}a(t_2-t_1)(t_2+t_1)\right)$$

$$\Delta(v^2) = v(t_2)^2 - v(t_1)^2 = \left(v(t_2)-v(t_1)\right)\left(v(t_2)+v(t_1)\right)$$

$$= a(t_2-t_1)\cdot\left(2v_0 + a(t_2+t_1)\right) = 2a\,\Delta s \quad !$$

In generale

$$\begin{cases} a(t) = a \\ v(t) = v_0 + at \\ s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

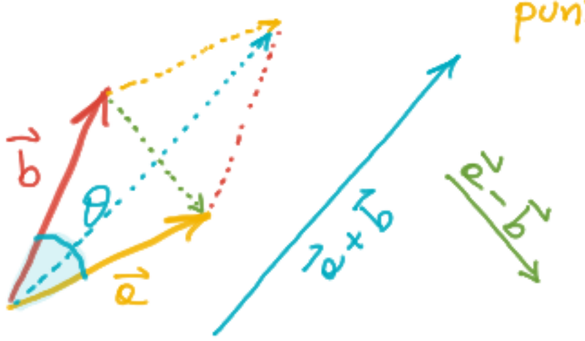
Vettori

Elementi di spazi vettoriali, ossia di strutture algebriche chiuse rispetto all'addizione e alla moltiplicazione per scalari appartenenti ad un campo

Esempi: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. $(a,b)+(c,d) \doteq (a+c, b+d)$, $\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$

Prodotto scalare (→ lavoro di una forza, potenziale, energia)

Cfr: parallelogramma, punta-coda



Dati due vettori $\vec{a}, \vec{b}$, il loro **prodotto scalare** è equivalentemente

- il prodotto delle lunghezze per il coseno dell'angolo compreso
- la somma dei prodotti delle coordinate corrispondenti.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$$

Dimostrazione. In virtù del Teorema del coseno $\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \pm 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos\theta$, dunque

$$4\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta = \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left((a_k+b_k)^2 - (a_k-b_k)^2 \right) = 4 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k . \quad \square$$

Proprietà del prodotto scalare sono $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ e $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \circ \vec{c} = \lambda(\vec{a} \circ \vec{c}) + \mu(\vec{b} \circ \vec{c})$

commutativo — bilineare

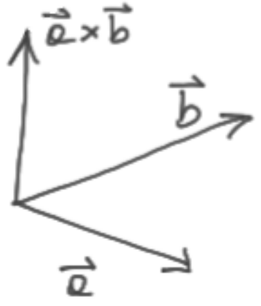
Prodotto vettore (→ momento di una forza, momento angolare, momento di inerzia)

È definito tra vettori di $\mathbb{R}^3$ nel seguente modo: $\vec{a} \times \vec{b}$ ("a vettor b") è quel **vettore** di $\mathbb{R}^3$ che ha

lunghezza data da $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin\theta|$, area del parallelogramma generato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$

direzione perpendicolare sia a quella di $\vec{a}$ che a quella di $\vec{b}$

verso fissato dalla positiva orientazione della terna $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ come pollice, indice e medio della **mano destra**.



In coordinate

$$(a_x, a_y, a_z) \times (b_x, b_y, b_z) = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x).$$

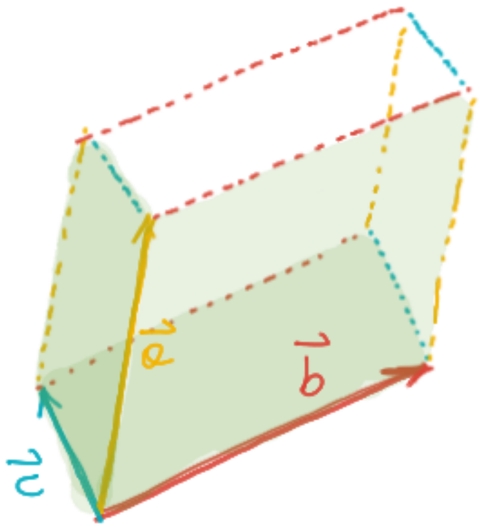
Proprietà caratterizzanti sono $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (anticommutativo) e

$$(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \times \vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{c}) + \mu(\vec{b} \times \vec{c}) \quad \text{(lineare)}$$

Identità di Lagrange $\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 = |\vec{a} \circ \vec{b}|^2 + \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2$ dà luogo (in dimensione 3) a

$$(a^2 + b^2 + c^2)(A^2 + B^2 + C^2) = (aA + bB + cC)^2 + (bC - Bc)^2 + (aC - Ac)^2 + (aB - Ab)^2$$

Anticipazione: Determinante come prodotto triplo o volume orientato



Dati $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, il parallelepipedo da questi generato è l'insieme dei vettori $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$ al variare dei λ_i in $[0,1]$.

Il volume del parallelepipedo è dato da

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \circ \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \circ \vec{b}|$$

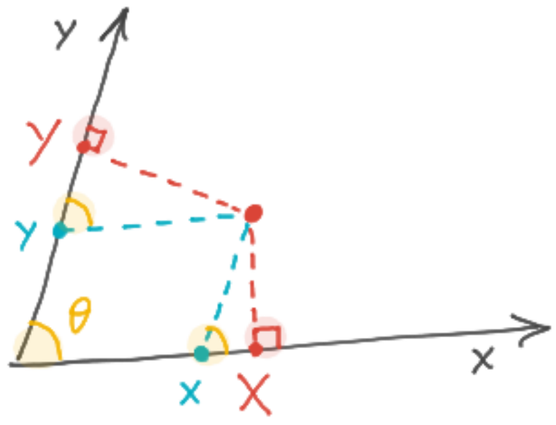
e la quantità $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$ codifica non solo il volume del parallelepipedo generato da $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ma anche l'orientazione della terna $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Più in generale, il **determinante** di una matrice $n \times n$ è il volume orientato del parallelepipedo n-dimensionale generato dalle colonne della matrice.

Poiché $\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \times \vec{b}$, il determinante di una matrice non cambia se una colonna (o riga) viene rimpiazzata dalla somma tra lei e una qualunque combinazione lineare delle altre.

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -25.$$

Cfr: Sarrus

Approfondimento: coordinate controvarianti e covarianti



Se nel piano abbiamo un sistema di riferimento dato da assi **non** ortogonali ma che formano un angolo θ, ci sono almeno 2 modi di assegnare una coppia (ascissa, ordinata) ad un generico punto del piano:

controvariante (solito): attraverso rette parallele agli assi

covariante: attraverso rette perpendicolari agli assi.

Problema¹: come si passa da una descrizione all'altra?

Problema²: come si esprime la distanza tra due punti nelle due modalità?

Sol¹: abbiamo $X = x + y\cos\theta$ e $Y = y + x\cos\theta$, ossia $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, da cui

$$x = \frac{1}{\sin^2\theta}\left(X - Y\cos\theta\right) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{\sin^2\theta}\left(Y - X\cos\theta\right), \quad \text{ossia} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin^2\theta}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\theta \\ -\cos\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Sol²: In coordinate controvarianti la distanza tra due punti è data dal Teorema del coseno:

$$d^2\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\,\Delta x\,\Delta y\cos\theta.$$

Per la corrispondenza raffigurata a lato $d^2 = \Delta x\,\Delta X + \Delta y\,\Delta Y = (\Delta x, \Delta y)\circ(\Delta X, \Delta Y)$,

dunque in coordinate covarianti $d^2\left((X_1, Y_1), (X_2, Y_2)\right) = \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\Delta X^2 + \Delta Y^2 - 2\,\Delta X\,\Delta Y\cos\theta\right)$.

Ex 34 p 76 Troviamo $3C \circ (2A \times B)$ per

$A = (2,3,-4) \quad B = (-3,4,2) \quad C = (7,-8,0)$.

$$3C \circ (2A \times B) = 6\,(A \times B) \circ C = 6 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 4 & -8 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 4 & -8 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 12 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & -8 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12\left(-32 + 21 + 56\right) = 12 \cdot 45 = 540.$$

Ex 35 p 76 $\vec{a} = (3,0)$, $\vec{b} = (4\cos 30°, 4\sin 30°)$, $\vec{c} = (10\cos 120°, 10\sin 120°)$.

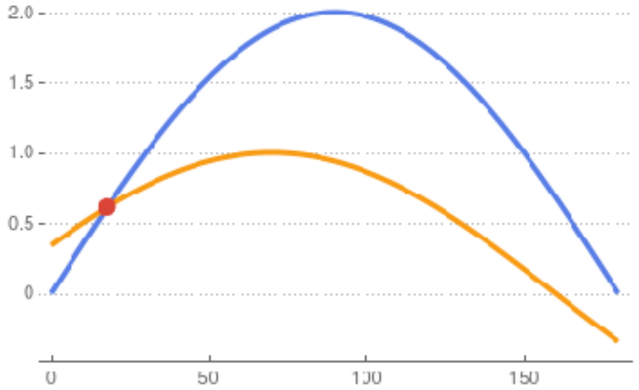
Vogliamo p e q tali che $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$. Poiché $(\cos 30°, \sin 30°) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ mentre $(\cos 120°, \sin 120°) = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, la questione è

$$\begin{cases} 3p + 2\sqrt{3}\,q = -5 \\ 2q = 5\sqrt{3} \end{cases}$$

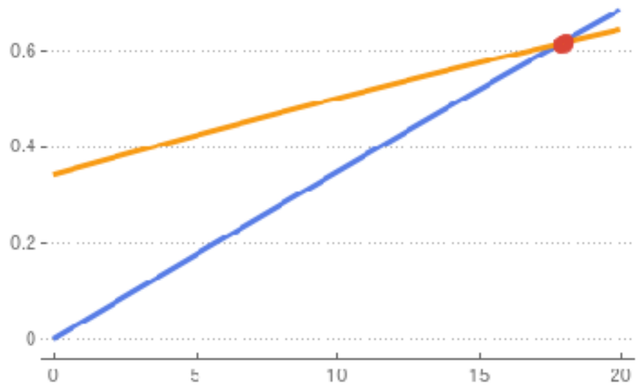
da cui $q = \frac{5}{2}\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}\,q = 15$, $3p = -5 - 15 = -20$ e infine $p = -20/3$.

Esercizio 25p

Vogliamo trovare / stimare le soluzioni di $2\sin\theta = \sin(\theta+20°)$ in $[0°, 180°]$. Da uno studio grafico si ha che esiste un'unica soluzione, attorno ai $18°$. È legittimo chiedersi se $18° = \pi/10$ sia una soluzione esatta, ma non può esserlo per ragioni algebriche.



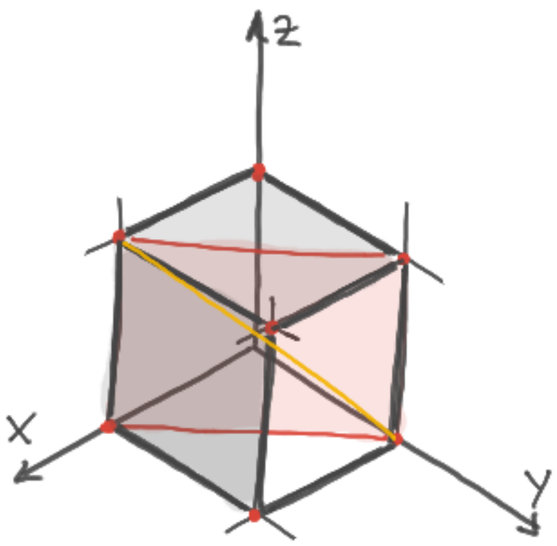
$2\sin(\pi/10)$ ha come polinomio minimo x^2+x-1, mentre $\sin(\pi/10+\pi/9)$ ha come polinomio minimo un polinomio di grado 12 e coefficienti interi, neppure monico.

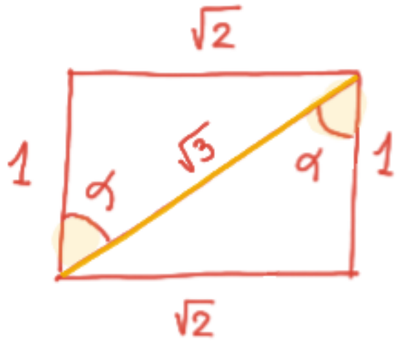


La soluzione esatta è data dal sistema
$$\begin{cases} 2y = y\cos\frac{\pi}{9} + x\sin\frac{\pi}{9} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$
ed è pertanto
$$\theta = \arctan\left(\frac{\sin(\pi/9)}{2-\cos(\pi/9)}\right)$$

Ex 59 p78

In un cubo, qual è l'angolo tra una diagonale ed uno degli spigoli adiacenti?





$\sin\alpha = \sqrt{2/3}$

$\cos\alpha = \sqrt{1/3}$

$\tan\alpha = \sqrt{2}$

Dalle considerazioni a lato questo è $\arctan(\sqrt{2})$.
La sua ampiezza è compresa tra $45°$ e $60°$ poiché $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3}$ e $\tan(45°) = 1$, $\tan(60°) = \sqrt{3}$.* Più accuratamente, 2α è tale per cui $\sin(2\alpha) = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\cos(2\alpha) = -\frac{1}{3}$. Segue

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\approx 45° + \frac{1}{6} \text{ di radiante.}$$

Analogamente $\tan(3\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{5} \approx \sqrt{3} - 2$ comporta $3\alpha \approx 180° - 15°$ e $\alpha \approx 55°$.

* Cfr. metodo di falsa posizione: supponendo che il grafico della tangente sia rettilineo tra $45°$ e $60°$, $\frac{\sqrt{2}-1}{\alpha - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\frac{\pi}{12}} \longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-1}$