Sistemi lineari

intersezioni di rette
allineamento di punti
problemi di ottimizzazione

Approfondimento

Equazione diofantea $ax+by=n$

Problemi semplici: ricostruire due quantità da somma e differenza, ripartire una quantità in parti proporzionali a cose fissate

Problemi intermedi: ottimizzazione lineare, interpolazione/estrapolazione polinomiale, decomposizione in fratti semplici, metodo di falsa posizione

Problemi avanzati: caratterizzare nucleo e immagine di applicazioni lineari, determinare autovettori

Trick #0: (dis)equazione è sinonimo di informazione.

Trick #1: se sappiamo che $x+y=s$ e $x-y=d$, allora $s+d=(x+y)+(x-y)=2x$ e $s-d=(x+y)-(x-y)=2y$, dunque $x=(s+d)/2$ e $y=(s-d)/2$.

Oss #1adv: questo ha a che fare con le rotazioni di $45°$.

Trick #2: se vogliamo ripartire A in parti proporzionali a $2,7,11$, possiamo suddividere A in $2+7+11=20$ parti congruenti e assegnare $\frac{2}{20}A$, $\frac{7}{20}A$, $\frac{11}{20}A$ a chi di dovere.

Cfr: Teorema della bisettrice

Problemi "concreti"

Già incontrato (ed aggirato): Dato il triangolo di vertici $A(0;0)$, $B(8;2)$, $C(1;4)$, dove si trova il suo baricentro G?

Soluzione (via lunga): È sufficiente trovare le equazioni di due mediane e metterle a sistema per trovare le coordinate di G. Il punto medio di BC cade in $(9/2\,;\,3)$, dunque la mediana uscente da A ha equazione $y = \frac{2}{3}x$. Il punto medio di AB cade in $(4;1)$, dunque la mediana uscente da $C(1;4)$ ha pendenza -1 ed equazione $y = 5-x$.

Mettendo a sistema...

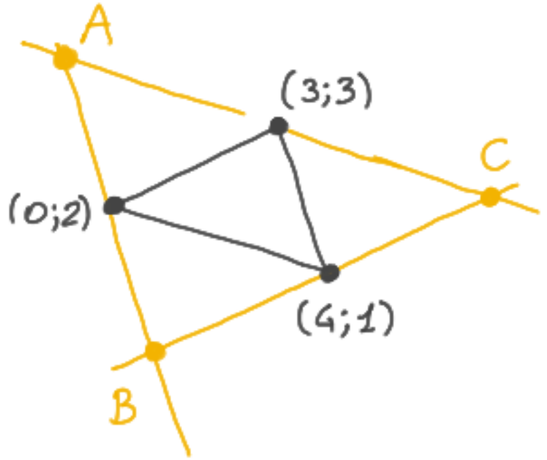
catena di deduzioni

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ y = 5-x \end{cases} \longrightarrow \frac{2}{3}x = 5-x \longrightarrow \frac{5}{3}x = 5 \longrightarrow x = 3 \longrightarrow y = 5-x = 2$$

da cui abbiamo che G cade in $(3;2)$.

Memento: per il baricentro bastava applicare $G = (A+B+C)/3$. Comunque sia l'approccio resta valido nel determinare H (orto) oppure O (circo).

Già incontrato: sapendo che i punti medi dei lati di un triangolo si trovano in $(0;2)$, $(4;1)$, $(3;3)$, come possiamo (se possiamo) ricostruire le posizioni dei vertici del triangolo?



Soluzione: senza eccessive premure d'eleganza o efficacia, possiamo assegnare coordinate generiche ai vertici A, B, C del triangolo, trascrivere le info del testo sotto forma di equazioni e vedere cosa riusciamo a dedurre.

Dal fatto che $(3;3)$ è punto medio di AC abbiamo ad esempio $x_A + x_C = 6$ e $y_A + y_C = 6$. Complessivamente collezioniamo 6 equazioni in 6 incognite:

$$\begin{cases} x_A + x_C = 6 & y_A + y_C = 6 \\ x_A + x_B = 0 & y_A + y_B = 4 \\ x_B + x_C = 8 & y_B + y_C = 2 \end{cases}$$

e sia il sistema 3×3 relativo alle ascisse che quello relativo alle ordinate hanno soluzione unica, facilmente determinabile.

Più efficacemente: un triangolo qualunque e il suo triangolo mediale hanno lo stesso baricentro, che giace a $2/3$ di ogni mediana.

Già osservato: l'analogo problema per i quadrilateri NON HA soluzione unica.

>> Fast forward

Sapendo che $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+4)} = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x+2)} + \dfrac{C}{(x+4)}$,

quanto valgono A, B e C ?

Soluzione poco efficiente. Vogliamo che si abbia $1 = A(x+2)(x+4) + B(x+1)(x+4) + C(x+1)(x+2)$ per qualunque $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,4\}$. Equivalentemente vogliamo

$$1 = (A+B+C)\,x^2 + (6A+5B+3C)\,x + (8A+4B+2C)$$

ovvero

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ 6A+5B+3C = 0 \\ 8A+4B+2C = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Come veniamo a capo di problemi analoghi in non troppe operazioni ? **Eliminazione gaussiana.**

>> Soluzione efficiente.

Posto $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+4)}$ si ha

$$A = \lim_{x\to -1} f(x)(x+1) = \frac{1}{3}, \qquad B = \lim_{x\to -2} f(x)(x+2) = -\frac{1}{2}, \qquad C = \lim_{x\to -4} f(x)(x+4) = \frac{1}{6}.$$

Metodo di falsa posizione o "regula falsi"

Approfondimento

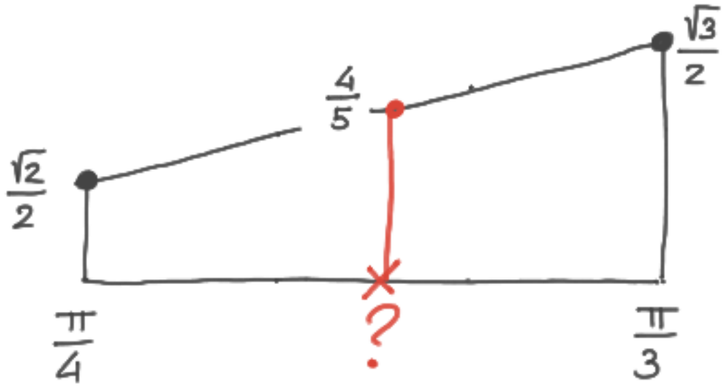
Problema-modello: di un angolo acuto α sappiamo che $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Qual è l'ampiezza di α?

$$\alpha = \arcsin\frac{4}{5} = \arccos\frac{3}{5} = \arctan\frac{4}{3} = 2\arctan\frac{1}{2}$$

Soluzione: l'ampiezza di α è chiaramente compresa tra $45° = \frac{\pi}{4}$ e $60° = \frac{\pi}{3}$. Per questi angoli di riferimento $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{4}{5}$ e $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4}{5}$. Sull'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ il grafico del seno è approssimativamente rettilineo, dunque una buona approssimazione di $\alpha = \arcsin\frac{4}{5}$ è data dalla soluzione del problema raffigurato, ossia dalla soluzione dell'equazione

$$\frac{4}{5} = \frac{\sqrt{3}/2 - \sqrt{2}/2}{\pi/3 - \pi/4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

che a conti fatti è tra 53° e 54°.



Approssimazioni anche migliori possono essere trovate applicando analoghi ragionamenti ad $\alpha/2$, compreso tra $\pi/8$ e $\pi/6$.

Achtung!

- non sempre un sistema è prodotto da considerazioni geometriche, ma può essere sempre interpretato in tal senso
- non sempre la strategia risolutiva più efficace è data dal seguire pedissequamente il metodo di sostituzione, eliminazione, confronto o Cramer.

Esempio. Sapendo che $a+3b+c=8$, $3a+b+c=11$ e $a+b+3c=21$, quanto vale c?

Soluzione. Sommando membro a membro tutte le info del testo abbiamo $5(a+b+c)=40$, da cui seguono $a+b+c=8$ e $2c=(a+b+3c)-(a+b+c)=21-8=13$, pertanto $c=13/2$.

Esempio. In un cortile, tra galline e maiali ci sono 13 animali. Se vi sono un totale di 32 zampe, quanti sono i maiali?

Soluzione crudele Se ad ognuno dei 13 animali spezziamo due zampe, restano un totale di $6=32-26$ zampe a sostenere $3=6/2$ maiali.

Problema equivalente Nel piano, dov'è che la retta di equazione $x+y=13$ interseca quella di equazione $2x+y=16$?

Nota. A volte è pratico passare dall'interpretazione geometrica a quella "bucolica" e viceversa.

Inesattezze del testo

1) Una **matrice** non è semplicemente una tabella di numeri. Questa è la forma: la sostanza è **una rappresentazione di un'applicazione lineare*** da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$.

2) Le matrici non si moltiplicano tra loro secondo un algoritmo dettato dalla volontà divina, ma secondo ciò che sono: la matrice AB rappresenta la composizione delle applicazioni lineari descritte da A e B.

Applicazioni lineari. $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è lineare se $\forall\, v, w \in \mathbb{R}^m$ e $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha $\varphi(\lambda v + \mu w) = \lambda\, \varphi(v) + \mu\, \varphi(w)$.

Un'applicazione lineare è fissata dalle immagini dei vettori $e_1, e_2, \dots, e_m$ della base canonica di $\mathbb{R}^m$. La matrice che rappresenta φ è quella che ha per colonne $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)$. Viceversa, una tabella con m colonne ed n righe è associata ad un'unica applicazione lineare da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{eccetera}$$

Esempio. Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Le applicazioni lineari associate $\varphi_A, \varphi_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ agiscono nel seguente modo:

$$\varphi_A : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \varphi_B : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Più in generale, poiché $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, abbiamo

$$\varphi_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\varphi_B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + y \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

È per questo motivo che l'elemento nella riga i e colonna j di AB è dato dal prodotto scalare tra la i-esima riga di A e la j-esima colonna di B.

Se agiamo su $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ prima tramite φ_B e poi tramite φ_A, cosa otteniamo?

$$\varphi_A(\varphi_B(v)) = \varphi_A\left(\begin{pmatrix} 5x + y \\ 3y \end{pmatrix}\right) = (5x+y)\,\varphi_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 3y\,\varphi_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (5x+y)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3y \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10x + 2y \\ 15x + 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y \\ 12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x + 5y \\ 15x + 15y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AB\,v.$$

Determinante.

Se $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme di misura $\mu(\Omega) > 0$, il rapporto $\mu(\varphi(\Omega)) / \mu(\Omega)$ è una quantità che dipende da φ ma non da Ω.

Il **determinante** di φ è tale quantità, presa con segno positivo o negativo a seconda che φ preservi o inverta l'orientazione.

Il determinante di una matrice è il determinante dell'applicazione lineare rappresentata.

In particolare

$|\det A|$ è l'area / il volume del parallelogramma / parallelepipedo generato dalle colonne di A.

prodotto vettore

shoelace formula

Cfr p130

Teorema di Binet: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Immediata conseguenza della definizione geometrica.

Osservazione: risolvere un sistema è trovare (se esiste) la contro-immagine di un vettore tramite un'applicazione lineare. Un sistema ha soluzione unica se e solo se il determinante della matrice associata è non nullo.

Regola di Cramer (Mecleurin) - dimostrazione.

Sia $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare con $\det \varphi \neq 0$, rappresentata dalla matrice M. Considerato il sistema $Mv = w$, sia M_k la matrice ottenuta rimpiazzando la k-esima colonna di M con w, sia φ_k l'applicazione lineare associata a M_k. Si ha

$$v_k = \det M_k \,/\, \det M \quad \text{per ogni } k \in [1, n].$$

Dimostrazione. Fissato un valore di $k \in [1,n]$, consideriamo la matrice che rappresenta $\varphi^{-1} \circ \varphi_k$. Per ogni $j \in [1,n]$ diverso da k si ha

$$\varphi^{-1}(\varphi_k e_j) = \varphi^{-1}(\varphi e_j) = e_j$$

mentre $\varphi^{-1}(\varphi_k e_k) = \varphi^{-1}(w) = v$. Segue che la matrice che rappresenta $\varphi^{-1} \circ \varphi_k$ ha determinante v_k. Dal Teorema di Binet segue che

$$v_k = \det(\varphi^{-1} \circ \varphi_k) = \det(\varphi_k) \cdot \det(\varphi^{-1}) = \det M_k \,/\, \det M.$$

$\square$

Applicazione. Risolviamo il sistema
$$\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 7x + 3y = 13 \end{cases}$$

Poiché $\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = 15 - 14 = 1 \neq 0$, il sistema ha soluzione unica. Via Cramer

$$\det M_1 = \det\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 13 & 3 \end{pmatrix} = 24 - 26 = -2 \quad , \quad \det M_2 = \det\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} = 65 - 56 = 9 \ ,$$

dunque $(x, y) = (-2, 9)$.

Osservazione: il metodo di Cramer è molto efficiente nella soluzione dei sistemi 2×2, ma è raro che lo sia per sistemi 3×3 o di ordine superiore. Negli ultimi casi è preferibile procedere per eliminazione (gaussiana).

Esempio: Risolviamo il sistema
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 26 \\ 2x - y + 2z = 17 \\ 4x + 6y - z = 17 \ . \end{cases}$$

Sottraendo (termine a termine) dalla seconda equazione il doppio della prima otteniamo $-5y - 6z = -35$.

Sottraendo (termine a termine) dalla terza equazione il quadruplo della prima otteniamo $-2y - 17z = -87$.

Possiamo allora considerare il sistema equivalente (cioè con le medesime soluzioni)

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 26 \\ 5y + 6z = 35 \\ 2y + 17z = 87. \end{cases}$$

Possiamo ora combinare il quintuplo dell'ultima equazione con il doppio della seconda per ricavare

$$365 = 5 \cdot 87 - 2 \cdot 35 = (10y + 85z) - (10y + 12z) = 73z,$$

da cui segue immediatamente $z = 5$.

Dalla seconda equazione otteniamo $5y = 35 - 6z = 35 - 30 = 5$, da cui $y = 1$.

Infine dalla prima equazione $x = 26 - 2y - 4z = 26 - 2 - 20 = 4$, dunque $(x, y, z) = (4, 1, 5)$.

Con Cramer avremmo eseguito molte più operazioni, a partire da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = 1 + 16 + 48 + 16 + 4 - 12 = 73$$

e proseguendo con i determinanti di $\begin{pmatrix} 26 & 2 & 4 \\ 35 & -1 & 2 \\ 87 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 26 & 4 \\ 2 & 35 & 2 \\ 4 & 87 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 26 \\ 2 & -1 & 35 \\ 4 & 6 & 87 \end{pmatrix}$.

Rivediamo mediante eliminazione

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 6A+5B+3C=0 \\ 8A+4B+2C=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B=0 \\ 6A+2B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B=0 \\ 3A=1 \end{cases} \qquad A=\frac{1}{3} \qquad B=-\frac{1}{2} \qquad C=\frac{1}{6}$$

Problema A. Una comitiva di N amici va a mangiare la pizza. C'è chi divide la pizza in 6 e chi la divide in 8 fette. Se le N pizze corrispondono a 100 fette, quanto può essere numerosa la comitiva? [da 13 a 16 persone]

Problema B. Le figurine di un gioco sono vendute in pacchetti da 7 o da 13. Quanti pacchetti di un tipo e dell'altro dobbiamo acquistare per avere esattamente 100 figurine? [necessariamente 5 e 5]

A e B conducono a equazioni con il vincolo di interezza delle soluzioni, dette **equazioni diofantee** in onore di Diofanto di Alessandria (III-IV secolo).

Soluzione del generico sistema 2x2

A partire da $\begin{cases} Ax + By = U \\ Cx + Dy = V \end{cases}$ possiamo dedurre

$$ACx + BCy = UC$$
$$ACx + ADy = VA$$
$$(AD - BC)y = VA - UC$$

così come

$$ADx + BDy = UD$$
$$BCx + BDy = VB$$
$$(AD - BC)x = UD - VB.$$

In particolare, posto che $AD \neq BC$, la soluzione è unica ed è data da

$$x = \frac{UD - BV}{AD - BC}, \qquad y = \frac{AV - UC}{AD - BC}$$

come garantito anche dal metodo di Cramer.

Se $AD = BC$ possono esserci 0 oppure ∞ soluzioni, a seconda che i valori di U e V rendano incompatibili oppure equivalenti le due equazioni del sistema.

Un altro "trucco" utile: i nomi delle variabili sono arbitrari.

Il problema $\begin{cases} 2x+3y = 10 \\ 3x+5y = 11 \end{cases}$ può anche essere formulato come $\begin{cases} 2(x+y)+y = 10 \\ 3(x+y)+2y = 11 \end{cases}$

dunque è strettamente imparentato con il problema $\begin{cases} 2z+y = 10 \\ 3z+2y = 11 \end{cases}$

tramite $x+y = z \longleftrightarrow x = z-y$.

In alternativa, ponendo $w = x+2y \longleftrightarrow x = w-2y$ abbiamo $\begin{cases} 2w-y = 10 \\ 3w-y = 11 \end{cases}$

che è di immediata risoluzione: da $w=1$, $y=-8$

segue $x = 17$.

Sulla scia della stessa idea... Quali sono le soluzioni di $\begin{cases} 20(b-a) = ab \\ 20(b+a) = 9ab \end{cases}$?

Più difficile Quali sono le soluzioni intere di $6ab+2a+3b = 298$?

Esempi

Ex 133 p 146 $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ 2x-5y=3 \end{cases}$

retta di pendenza 3/4 passante da (3;2)

retta di pendenza 2/5 passante da (4;1)

Via eliminazione

$$6x-8y=2$$
$$6x-15y=9$$
$$7y=-7$$
$$y=-1$$
$$3x=1+4y=-3$$
$$x=-1$$

Via Cramer

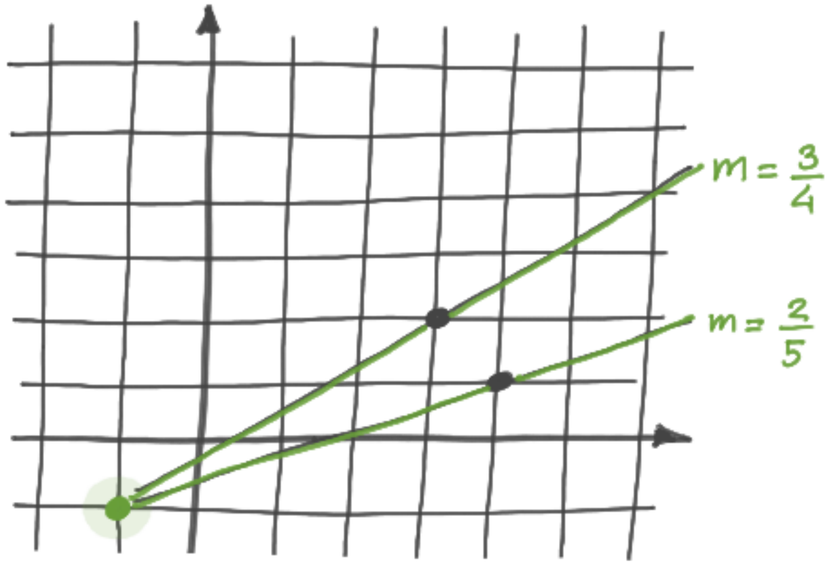
$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15+8=-7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5+12=7$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9-2=7$$

$$x = 7/(-7) = -1$$

$$y = 7/(-7) = -1$$



Grafico

Freestyle

$x+y=-2$ dunque $y=-2-x$, $3x+4(x+2)=1$, $7x+8=1$, $x=-1$

e di conseguenza $y=-1$.

Esercizio Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ha soluzione unica?

$$\begin{cases} 3x + y + z = 13 \\ x + ky + z = 21 \\ x + y + 4z = 34 \end{cases}$$

Nota: per Cramer la colonna dei termini noti è irrilevante, l'unica cosa che conta è il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Osservazione

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -11 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 11 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 11 \\ 0 & k-1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ k-1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & -3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11(k-1) + 6$$

si annulla solo per $k = 5/11$. Negli altri casi il sistema ha soluzione unica.

Sistemi 3x3, metodo ibrido:

I eliminiamo la x dalla 2ª e dalla 3ª equazione sfruttando la 1ª,

II risolviamo il sistema 2x2 in y, z mediante Cramer

III ricostruiamo la x dalla prima equazione

Osservazione: possiamo riordinare le equazioni e scegliere la variabile da eliminare come ci torna più comodo.

Implementazione:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 12 \\ 2x + y - 2z = 11 \\ 4x + 6y + z = 20 \end{cases}$$

I
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 12 \\ -3y - 10z = -13 \\ 4y + 5z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y + 10z = 13 \\ 4y + 5z = -2 \end{cases}$$

$$3 \cdot 5 - 10 \cdot 4 = -25$$
$$13 \cdot 5 - 10 \cdot (-2) = 85$$
$$3 \cdot (-2) - 4 \cdot 13 = -58$$

II
$$y = -85/25$$
$$z = 58/25$$

III
$$x = 12 - 2y - 4z = 12 + \frac{170}{25} - \frac{232}{25} = \frac{300 + 170 - 232}{25}$$
$$x = 238/25.$$

error detection IV controlliamo che i valori di x, y, z così trovati soddisfino davvero le equazioni iniziali, moltiplicate membro a membro per 25

$238 - 170 + 232 = 300$ ok $\quad 476 - 85 - 116 = 275$ ok $\quad 952 - 510 + 58 = 500$ ok

torna tutto, favoloso.

Problema - sfida: in quante operazioni riuscite a risolvere il generico sistema 4×4 ?

the fewer the better, of course

Problema di estrapolazione visto in classe: $p(x)\in\mathbb{R}[x]$, $\deg p = 2$, $p(1)=3$, $p(2)=5$, $p(3)=8$.

Quanto vale $p(4)$?

Soluzione #1. WLOG $p(x) = ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$ e dalle info del testo

$$\begin{cases} a+b+c = 3 \\ 4a+2b+c = 5 \\ 9a+3b+c = 8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a+b+c = 3 \\ -2b-3c = -7 \\ -6b-8c = -19 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a+b+c = 3 \\ 2b+3c = 7 \\ 6b+8c = 19 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a+b+c = 3 \\ 2b+3c = 7 \\ -c = -2 \end{cases}$$

da cui $c=2$ e a cascata $b=1/2$ e $a=1/2$, ossia $p(x) = x(x+1)/2+2$, da cui $p(4)=12$.

Soluzione #2. L'operatore δ che porta $p(x)$ in $p(x+1)-p(x)$ abbassa di 1 il grado di qualunque polinomio non costante. In particolare $(\delta p)(x)$ è di primo grado e $(\delta^2 p)(x)$ è costante:

x	1	2	3	4
$p(x)$	3	5	8	12
$(\delta p)(x)$		2	3	4
$(\delta^2 p)(x)$		1	1	

Questo permette di ricostruire $p(4)$ SENZA ricostruire i coefficienti di $p(x)$, e in sole 6 operazioni di addizione o sottrazione.

Momento METAmatematico. Abbiamo appena affrontato e sconfitto un problema formulabile attraverso un sistema lineare, ma per il quale abbiamo rinvenuto una tecnica più efficiente di quelle "standard". Ciò lascia sospettare che tutti i sistemi associati a particolari matrici siano efficientemente risolti da tecniche ad hoc. E in effetti è proprio così: se la matrice associata ad un sistema è di Vandermonde

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots \\ & & \dots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots \end{pmatrix}$$

allora $\det V$ è $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ e il sistema è facilmente risolubile mediante differenze in avanti o equivalenti tecniche di interpolazione / estrapolazione.

Ulteriori indagini sulla questione hanno condotto agli algoritmi di moltiplicazione / inversione veloce di matrici mediante FFT (fast Fourier transform). Da un punto di vista meno storico e più filosofico, anche trovare soluzioni più efficienti di cose già risolte può essere estremamente proficuo.