Mat 2I.4
Sistemi lineari & trasformazioni

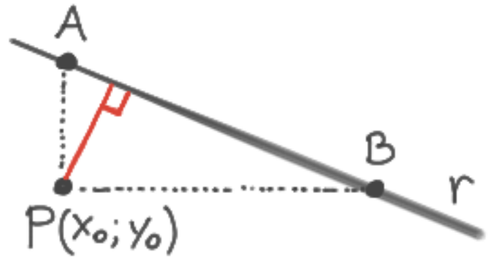
Reminder: il piano cartesiano/euclideo è per noi definito (in modo estrinseco) come $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$, insieme delle coppie ordinate di numeri reali.

Reminder: la distanza tra $P(x_1;y_1)$ e $Q(x_2;y_2)$ è per noi definita attraverso $d(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. Questo è equivalente a prendere il Teorema di Pitagora come assioma, per poi dimostrare che $d(P,Q)+d(Q,R)\geq d(P,R)$ (disug. triangolare).

Reminder: dati $A,B\subseteq\mathbb{R}^2$, $d(A,B)=\inf_{a\in A,\, b\in B} d(a,b)$ è la lunghezza della più corta congiungente.

Corollario: dato un punto P e una retta r, $d(P,r)$ è la distanza tra P e la proiezione di P su $\mathbb{R}$.

Fatto: la formula per la distanza punto-retta è deducibile dal primo Teorema di Euclide.



Dimostrazione: data la retta r di equazione $ax+by+c=0$ e il punto $P(x_0;y_0)$, consideriamo $A,B\in r$ in modo che A abbia la stessa ascissa di P e B abbia la stessa ordinata di P. Allora $d(P,r)$ è l'altezza relativa all'ipotenusa in un triangolo rettangolo con cateti PA e PB.

Poiché l'ultima lunghezza è $PA \cdot PB / \sqrt{PA^2+PB^2}$, a conti fatti si ha $d(P,r) = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Definizione: una $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con la proprietà che $\forall P,Q \in \mathbb{R}^2$, $d(P,Q) = d(\varphi(P), \varphi(Q))$ è detta **isometria** (trasformazione che preserva le distanze).

Fatto (visto a lezione) una isometria φ che fissa l'origine (ossia tale per cui $\varphi(O) = O$) è necessariamente una **applicazione lineare**, ossia una mappa tale per cui $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$ e $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ per ogni coppia di vettori v, w e per ogni scalare λ.

Fatto (visto a lezione) L'immagine di una applicazione lineare $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è interamente determinata dalle immagini dei vettori $\binom{1}{0}$ e $\binom{0}{1}$. Infatti per linearità $\varphi\left(\binom{x}{y}\right) = x\,\varphi\left(\binom{1}{0}\right) + y\,\varphi\left(\binom{0}{1}\right)$.
Posto che $\varphi\left(\binom{1}{0}\right) = \binom{a}{c}$ e $\varphi\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{b}{d}$, φ è rappresentata dalla **matrice** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M_\varphi$ e si ha

$$\varphi\left(\binom{x}{y}\right) = M_\varphi \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

Fatto Se φ è una isometria, φ conserva sia le aree che le ampiezze degli angoli.

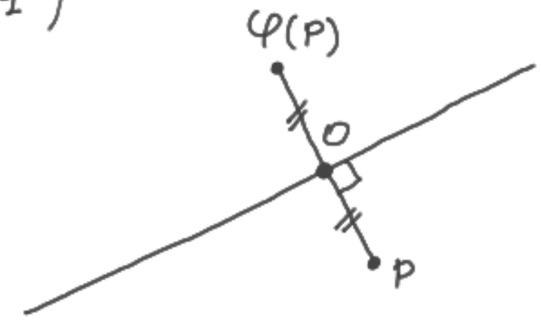
Corollario Se M_φ rappresenta una isometria, allora $\det M_\varphi = \pm 1$ e M_φ ha colonne ortogonali.

Una particolare isometria è quella data dalla riflessione (simmetria assiale) rispetto alla retta di equazione $y = mx$.

Per descriverla interamente è sufficiente capire quali sono le immagini di $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Ponendo $m = \tan\alpha$ abbiamo che $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ viene spedito in $\begin{pmatrix}\cos(2\alpha)\\ \sin(2\alpha)\end{pmatrix}$ mentre $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ viene spedito in $\begin{pmatrix}\sin(2\alpha)\\ -\cos(2\alpha)\end{pmatrix}$. Per quanto visto

Cfr: formule parametriche

$$M_\varphi = \begin{pmatrix}\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha)\\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha)\end{pmatrix} = \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}$$

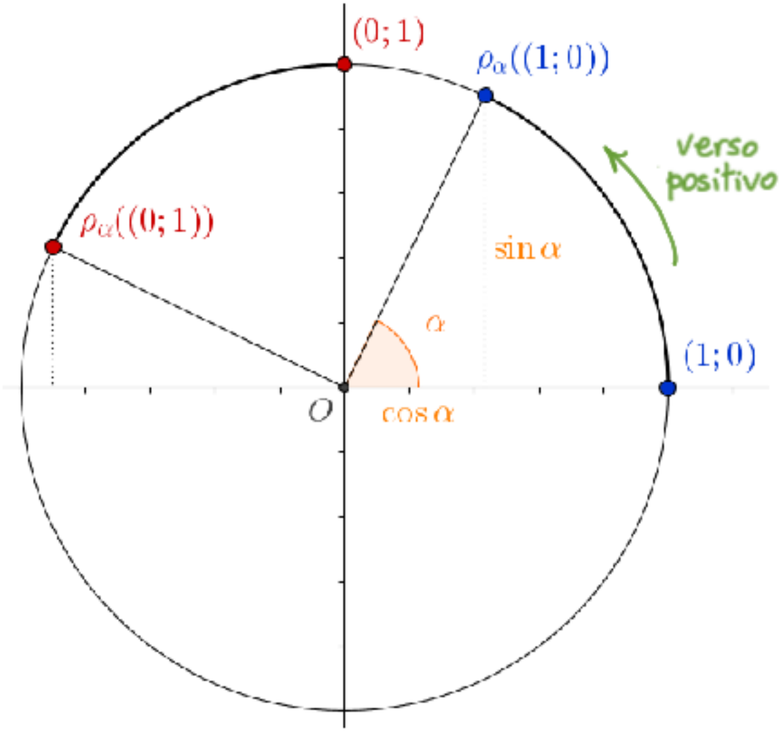


dunque l'immagine del generico punto $(x;y)$ è data da

$$\left(\frac{(1-m^2)x+2my}{m^2+1}\ ;\ \frac{2mx+(m^2-1)y}{m^2+1}\right).$$

La trasformazione preserva gli angoli ma **inverte** l'orientazione, poiché $\det M_\varphi = -\cos^2(2\alpha)-\sin^2(2\alpha) = -1$.

Riflessioni o simmetrie assiali



Rotazioni (attorno all'origine)

Le medesime argomentazioni della slide precedente si applicano al caso di $\rho_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotazione attorno all'origine (in verso positivo, ossia **antiorario**) di un angolo α. Per definizione di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ abbiamo $\rho_\alpha\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ e $\rho_\alpha\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$, dunque la matrice che rappresenta ρ_α è

$$M_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

che ha per colonne i precedenti versori e realizza $\det M_\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = +1$. Dall'osservazione pressoché banale che $\rho_\alpha \circ \rho_\beta = \rho_{\alpha+\beta}$ segue la non banale identità $M_\alpha \cdot M_\beta = M_{\alpha+\beta}$, equivalente alle **formule di addizione** di seno e coseno:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta .$$

L'immagine del punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ attraverso una rotazione di angolo α attorno all'origine è dunque $\begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$

Dalle rotazioni ai numeri complessi

Eseguiamo ora una particolare associazione tra punti del piano e opportune applicazioni lineari. All'origine associamo l'applicazione nulla, che manda qualsiasi vettore nell'origine. Al generico punto $(x;y) \neq (0;0)$ associamo la composizione tra

- l'applicazione che moltiplica tutte le coordinate per $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
- la rotazione attorno all'origine di angolo θ che manda $(1;0)$ nel versore $(x/\rho\,;\,y/\rho)$.

Così facendo il generico punto $(x;y)$ viene associato alla matrice $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = M_{(x;y)}$ che ha determinante ρ^2 e rappresenta una roto-dilatazione.

Poiché la moltiplicazione per scalari è commutativa e lo è anche la composizione di rotazioni attorno all'origine, il piano così pensato (come insieme di roto-dilatazioni) è non solo uno spazio vettoriale ($M_{P+Q} = M_P + M_Q$, $M_{\lambda P} = \lambda M_P$) ma anche un **gruppo** rispetto al prodotto, ossia un **campo**, struttura all'interno della quale è possibile lavorare con le quattro operazioni $(+, -, \cdot, /)$ preservando le usuali proprietà.

Esiste un insieme di NUMERI che geometricamente È UN PIANO!

Nota: non stiamo materialmente creando o inventando alcunché, stiamo solo re-interpretando da un punto di vista più astratto una struttura che conosciamo già: il piano.

All'interno di questo "piano re-interpretato" c'è un elemento molto particolare: la matrice associata al versore y (cioè al punto $(0;1)$) è $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, cioè quella che rappresenta una rotazione di $90°$ attorno all'origine. Ruotare per due volte attorno all'origine di $90°$ produce una rotazione di $180°$, cioè il passaggio all'antipodo rispetto all'origine: in questo insieme di numeri c'è qualcosa che ha come quadrato l'opposto dell'elemento neutro della moltiplicazione.

A questo punto, semplifichiamo la notazione: indicando il punto $(x;y)$ o la matrice associata semplicemente come $x+iy$, abbiamo $i^2=-1$, ma le regole dell'algebra restano invariate.

Ad esempio $(a+ib)(c+id) = ac + i\,bc + i\,ad + i^2\,bd = (ac-bd) + i\,(bc+ad)$.

L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, anche detto piano di Argand-Gauss, altro non è che l'usuale piano cartesiano, sul quale è definito il prodotto appena esplicitato.

Nota: la costruzione di $\mathbb{C}$ che abbiamo appena dettagliato non è quella più rapida (obiettivamente si fa prima a dire che $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$, insieme dei resti dei polinomi a coefficienti reali quando divisi per x^2+1) né la prima storicamente elaborata per risolvere le equazioni di 3° grado, ma ha il pregio di rendere palese che

- pretendere che $x^2+1=0$ abbia soluzioni non è incompatibile con le regole dell'Algebra
- moltiplicare per un numero complesso significa applicare una roto-dilatazione.

È un risultato di Geometria. LOL.

Il **Teorema fondamentale dell'Algebra** afferma che $\mathbb{C}$ ha un'altra clamorosa proprietà: è algebricamente chiuso, ossia: qualunque polinomio non costante $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ha ESATTAMENTE tante radici (contate con molteplicità) quante il grado di $p(x)$.

La dimostrazione di questo risultato (la prima, dovuta a Gauss) esula abbondantemente dai nostri scopi, ma è comunque basata su idee geometriche, riguardo la forma del grafico di $|p(z)|$ al variare di z su cerchi centrati nell'origine.

Teorema di decomposizione Ogni isometria $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che fissa l'origine è una rotazione o (esclusivo) una simmetria assiale.

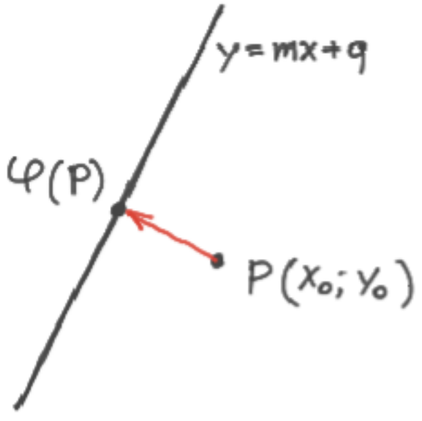
Dimostrazione. Poiché φ preserva le distanze e $\varphi(0)=0$, φ è un'applicazione lineare, che manda il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ in un qualche versore $\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$. Poiché φ preserva anche gli angoli, l'immagine di $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ deve essere un versore ortogonale a $\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$, ossia $\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix}$.
Nel primo caso la matrice associata a φ è una matrice di rotazione con $\det=+1$, nel secondo caso una matrice di riflessione con $\det=-1$. $\square$

Osservazione Il prodotto tra due matrici, entrambe di rotazione o entrambe di riflessione, è una matrice di rotazione. Il prodotto tra una matrice di rotazione e una di riflessione è una matrice di riflessione, poiché $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ e la composizione di isometrie è una isometria.

Corollario A meno di traslazioni qualunque isometria del piano può essere espressa come composizione di una o due riflessioni, a seconda che l'orientazione sia invertita o preservata.

Rettifica del testo: una trasformazione del piano $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **non deve** essere necessariamente iniettiva $\left(P \neq Q \to \varphi(P) \neq \varphi(Q)\right)$ o biunivoca. Ad esempio la proiezione (ortogonale) su una retta è una trasformazione più che legittima, ma non è iniettiva, anzi soddisfa $\varphi(\varphi(P)) = \varphi(P)$ per ogni $P \in \mathbb{R}^2$.

Domanda: qual è l'immagine del generico punto $P = \binom{x}{y}$ secondo la **proiezione** sulla retta di equazione $ax + by + c = 0$? Abbiamo diversi modi di rispondere: vediamone uno che ci permetterà di ritrovare l'espressione di una simmetria assiale, nonché di anticipare un concetto importante: il **completamento del quadrato**.



Il generico punto della retta di equazione $y = mx + q$ ha coordinate $(x; mx+q)$.

La sua distanza al quadrato da $P(x_0; y_0)$ è data da

$$(x - x_0)^2 + (mx + q - y_0)^2 = (m^2+1)\,x^2 - 2(my_0 + x_0 - mq) + (x_0^2 + y_0^2 + q^2 - 2qy_0)$$

che è un polinomio di secondo grado nella variabile x. Trovare il punto di minimo di questo polinomio è equivalente a trovare la proiezione cercata.

MOLTO IMPORTANTE!

Completamento del quadrato

Dato il polinomio di secondo grado $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ con $A > 0$, possiamo osservare che $4A \cdot f(x) = 4A^2x^2 + 4ABx + 4AC$ somiglia molto al polinomio $(2Ax + B)^2 = 4A^2x^2 + 4ABx + B^2$. In particolare, posto $\Delta = B^2 - 4AC$ abbiamo che

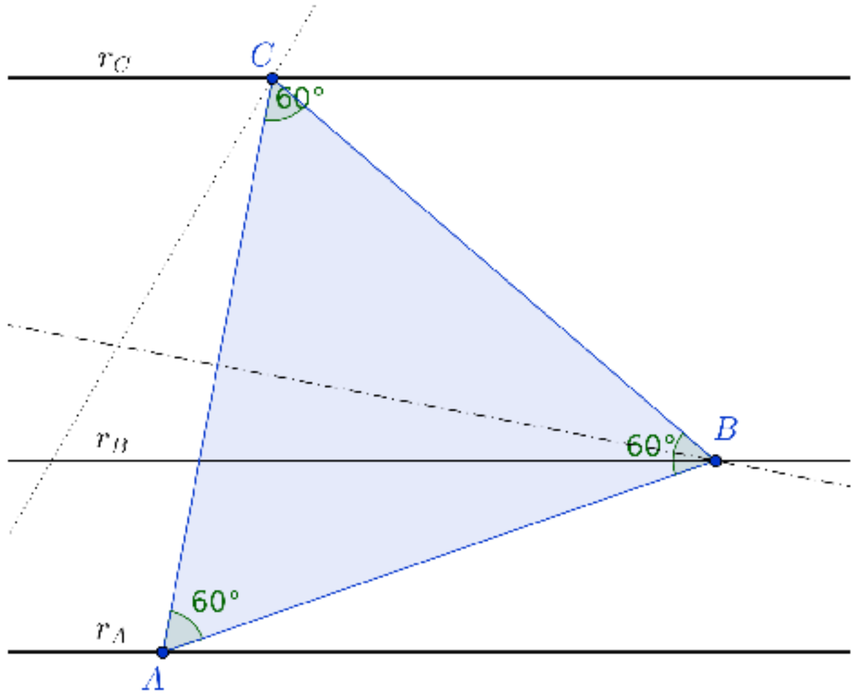
$$4A\, f(x) = (2Ax + B)^2 - \Delta \qquad (*)$$

e poiché qualunque quadrato è ≥ 0, $4A\, f(x) \geq -\Delta$, con uguaglianza realizzata solo quando $2Ax + B = 0$, cioè per $x = -B/(2A)$.

Tornando alla slide precedente, questo ci dà che l'ascissa della proiezione di $(x_0; y_0)$ su $y = mx + q$ è data da $(x_0 + my_0 - mq)/(m^2 + 1)$. Conseguentemente l'ordinata è $(mx_0 + m^2y_0 + q)/(m^2 + 1)$.

Il simmetrico di P rispetto alla retta è $2 \cdot \varphi(P) - P$, che conferma quanto trovato in precedenza.

(*) **Nota:** questo giustifica anche il fatto che le soluzioni di $Ax^2 + Bx + C = 0$ siano $(-B \pm \sqrt{\Delta})/(2A)$, posto che $\Delta \geq 0$. Inoltre localizza in $\left(-\frac{B}{2A}; -\frac{\Delta}{4A}\right)$ il vertice della parabola che è grafico di $f(x)$.



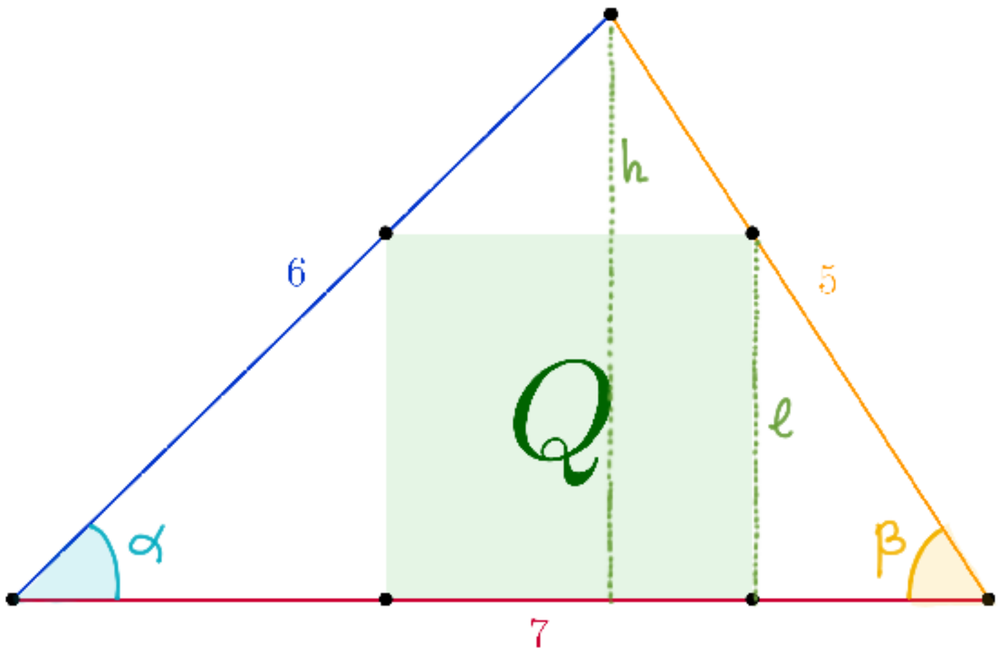
Un esercizio ULTRAclassico (Indam 2003, TFA 2013, ...)

Date nel piano tre distinte rette parallele r_A, r_B, r_C e un punto $A \in r_A$, si dimostri che esiste sempre un triangolo equilatero ABC con $B \in r_B$ e $C \in r_C$.

Dimostrazione. Supponiamo di avere già una soluzione ABC con ABC positivamente orientato. Allora C deve essere l'immagine di B secondo una rotazione di $60°$ attorno ad A. Denominando ρ tale rotazione abbiamo dunque $B \in r_B \to C \in \rho(r_B)$.

Poiché r_C e $\rho(r_B)$ sono incidenti, c'è un'unica posizione possibile per C, ovvero $r_C \cap \rho(r_B)$. E fissati A e C il punto B non può che trovarsi nell'intersezione tra r_B e l'asse di AC. Resta solo da provare che il triangolo ABC così determinato è effettivamente equilatero, ma questo è immediato dato che, per costruzione, $\widehat{BAC} = 60°$ e $BA = BC \longrightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 60°$.

Ammissione in SNS 2003: data una parabola Γ e un punto $P \in \Gamma$, si dimostri che esistono $Q, R \in \Gamma$ per cui PQR risulta equilatero.



Ulteriore SUPERclassico (Polya)

Qual è l'area Q del quadrato in figura?

Hints

- $7h = 2\Delta$, e 2Δ può essere determinato/a via Erone/Archimede
- $7 = \ell \cot\alpha + \ell + \ell \cot\beta$

  dunque basta trovare $\cot\alpha + \cot\beta = \frac{7}{h}$ ...

Recap definizioni sin/cos/tan...

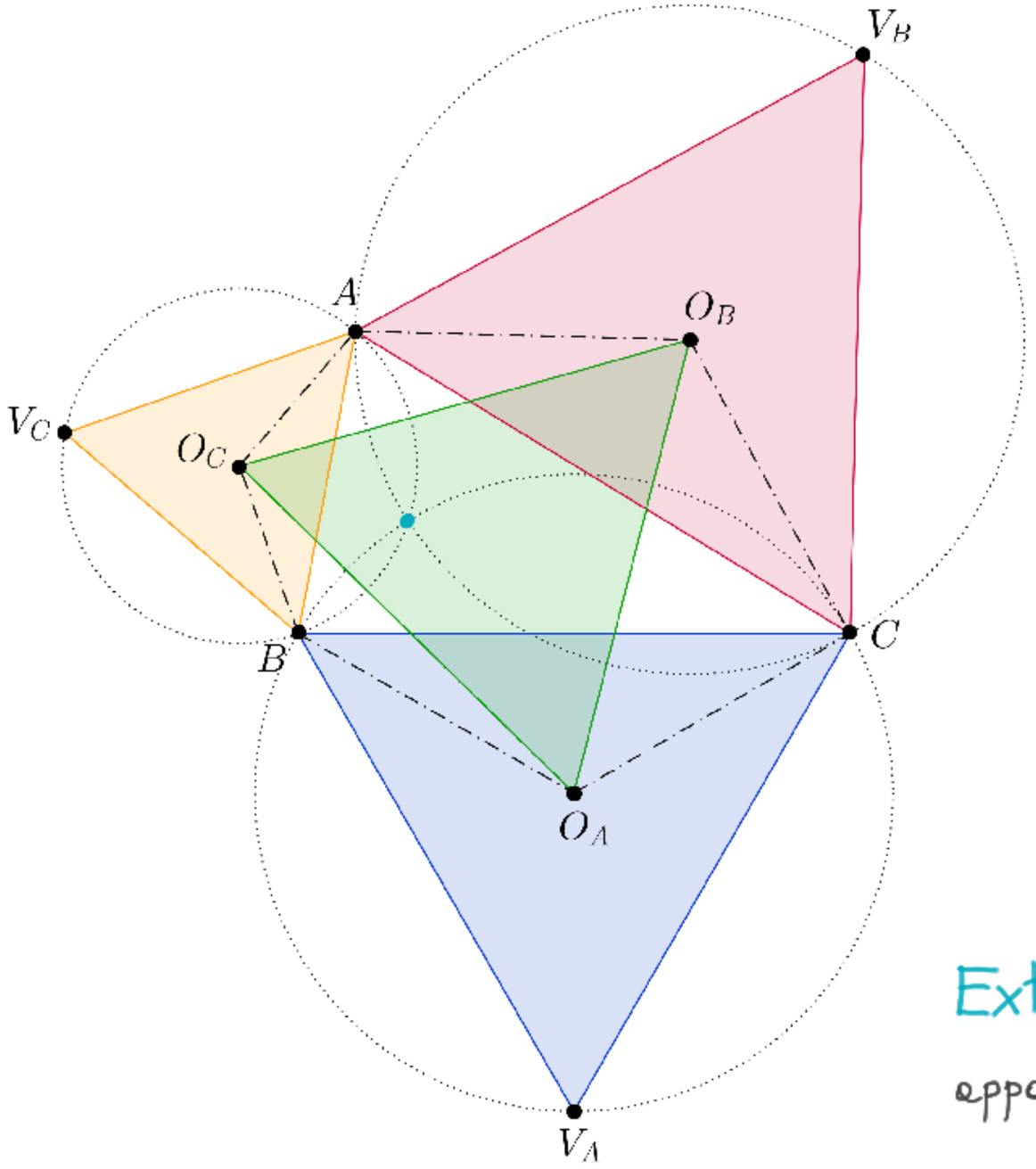
Dato un angolo acuto θ come a lato,

$\sin\theta = AC/AB$ (opposto/ipotenusa)

$\cos\theta = BC/AB$ (adiacente/ipotenusa)

$\tan\theta = AC/BC$ (opposto/adiacente)

$\cot\theta = BC/AC$ (adiacente/opposto)



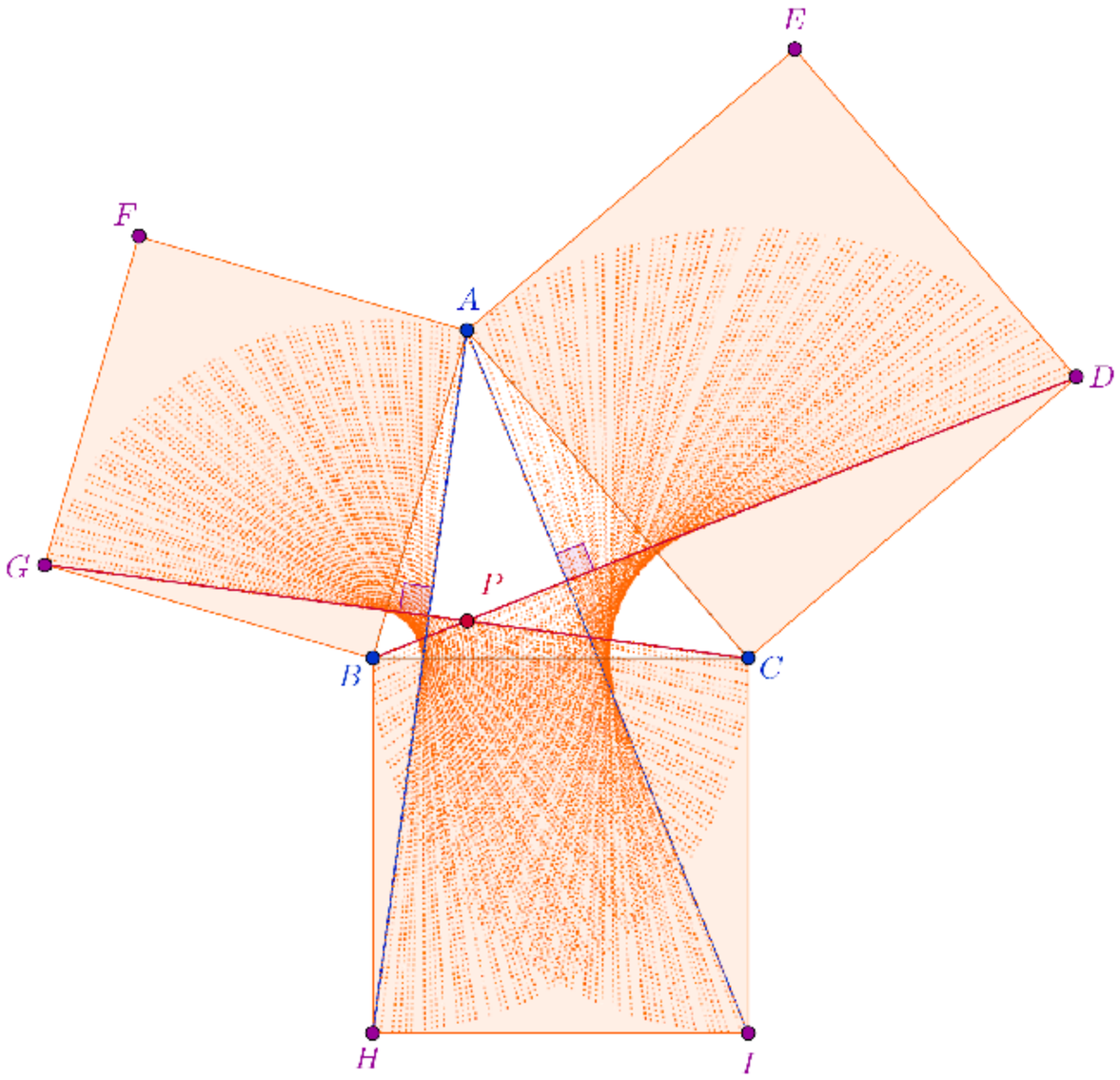
A beauty – Teorema di Napoleone

Dato un triangolo ABC nel piano, siano V_A, V_B, V_C i vertici dei triangoli equilateri costruiti sui lati di ABC, esternamente ad ABC. Siano O_A, O_B, O_C i centri di questi triangoli: $O_A O_B O_C$ è equilatero.

Dimostrazione (sketch)

- $AV_A = BV_B = CV_C$ per rotazioni
- $O_A O_B = O_B O_C = O_C O_A = AV_A / \sqrt{3}$ per roto-dilatazioni.

Extra: AV_A, BV_B, CV_C concorrono in un punto che appartiene alle circonf. circoscritte di ABV_C, BCV_A, CAV_B



Van Obel (Van Aubel)

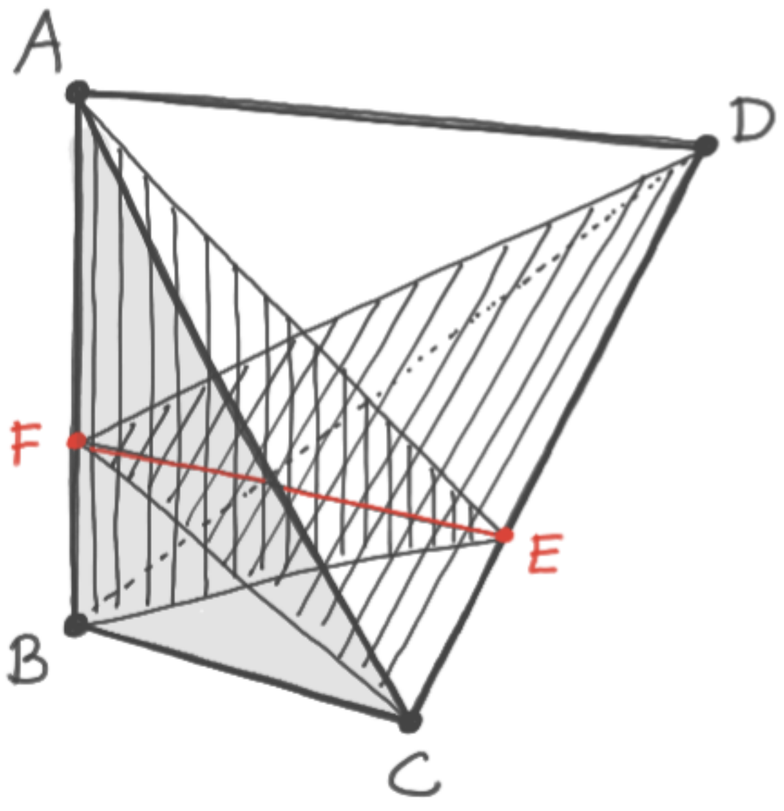
Ipotesi: ABC triangolo, ACDE, BAFG, CBHI quadrati costruiti esternamente, $P = BD \cap CG$.

Tesi: $AP \perp BC$.

Idea della dimostrazione: ruotiamo di 90° attorno ai punti opportuni e sfruttiamo le proprietà dell'ortocentro.

Dimostrazione

- Per rotazione attorno a B, $GBC \cong ABH$ e $CG \perp AH$
- Per rotazione attorno a C, $DBC \cong AIC$ e $BD \perp AI$
- Dai punti precedenti CG e BD sono traslati delle altezze di AHI per H e per I
- A, P e l'ortocentro di AHI sono allineati su una retta perpendicolare a BC.



Trivial... or not ?

Claim: il volume di un qualsiasi tetraedro è $\frac{1}{6}$ del prodotto tra le lunghezze di due spigoli opposti e la distanza tra questi.

Sotto-problema: è ovvio che esistano $F \in AB$ e $E \in CD$ tali per cui $EF \perp AB$ e $EF \perp CD$?

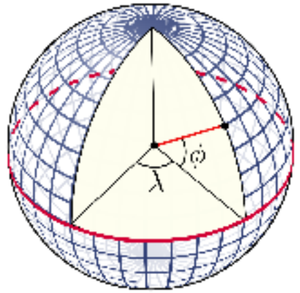
R: beh, due convessi chiusi e disgiunti nello spazio devono avere una distanza, realizzata da un'unica congiungente, perpendicolare ad entrambi.

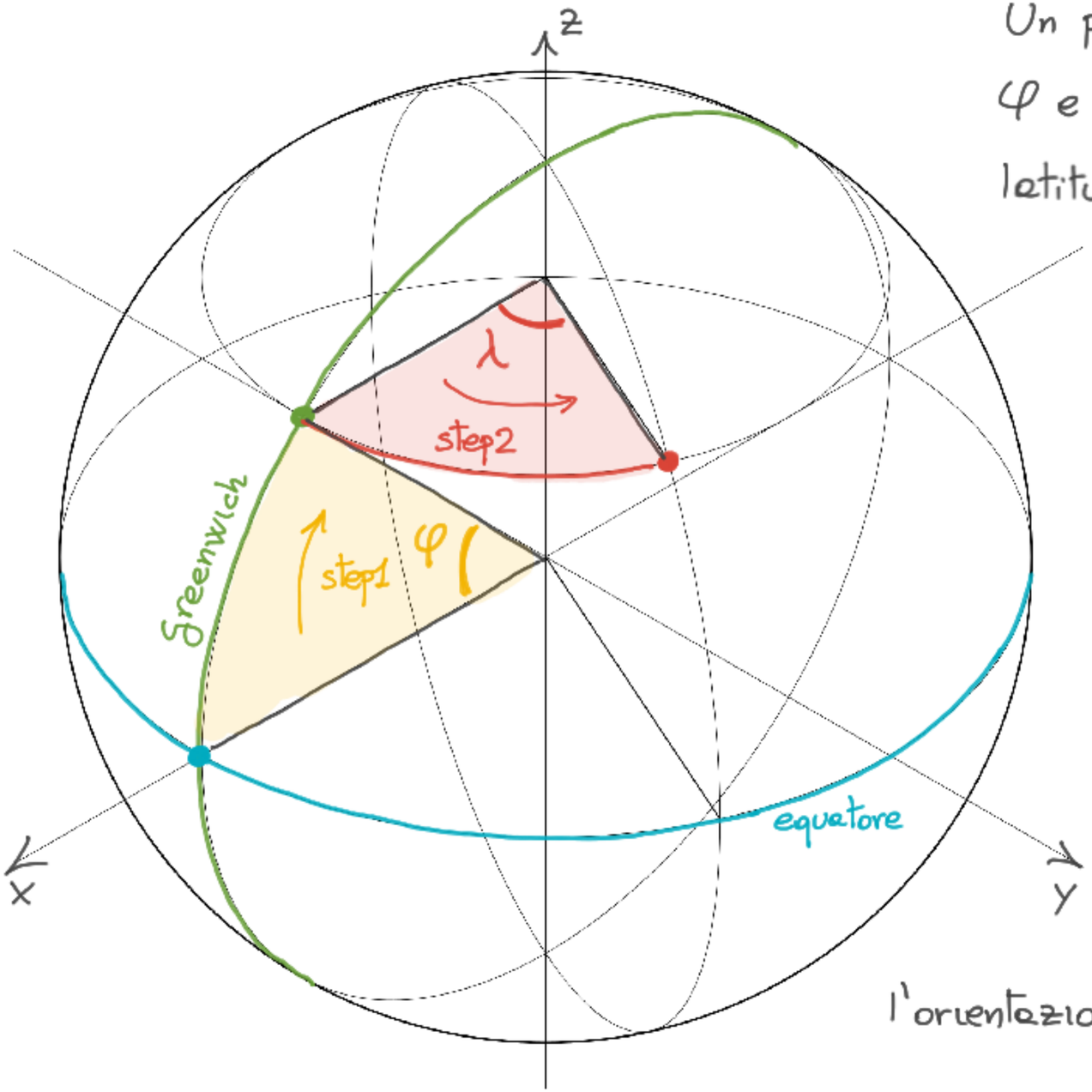
Recap perpendicolarità e prodotto scalare

$u, v \in \mathbb{R}^n$, $u \perp v$ sse

$0 = \langle u, v \rangle = \sum u_n v_n$

Homo faber (s)fortunae suae : come si ruota nello spazio ?





Un po' per volta. In termini degli angoli φ e λ che forniscono rispettivamente latitudine e longitudine, supponendo che $R = 1$ abbiamo le seguenti associazioni :

φ	λ	x	y	z
0	0	1	0	0
φ	0	$\cos\varphi$	0	$\sin\varphi$
φ	λ	$\cos\varphi \cdot \cos\lambda$	$\cos\varphi \cdot \sin\lambda$	$\sin\varphi$

dunque il generico punto sulla superficie ha coordinate

$$(R\cos\varphi\cos\lambda,\ R\cos\varphi\sin\lambda,\ R\sin\varphi).$$

Ogni isometria della sfera in sé che preserva l'orientazione è composizione di una rotazione in φ e una in λ.

Tangenti esterne alle circonferenze

$E, I \in O_rO_R$ sono i centri di dilatazioni di fattore $\pm R/r$

che mandano Γ_r in Γ_R. In particolare $E \in A_rA_R$, $I \in A_rB_R$ e posto $d = O_rO_R$, per proporzioni

$$I = \frac{RO_r + rO_R}{R+r}$$

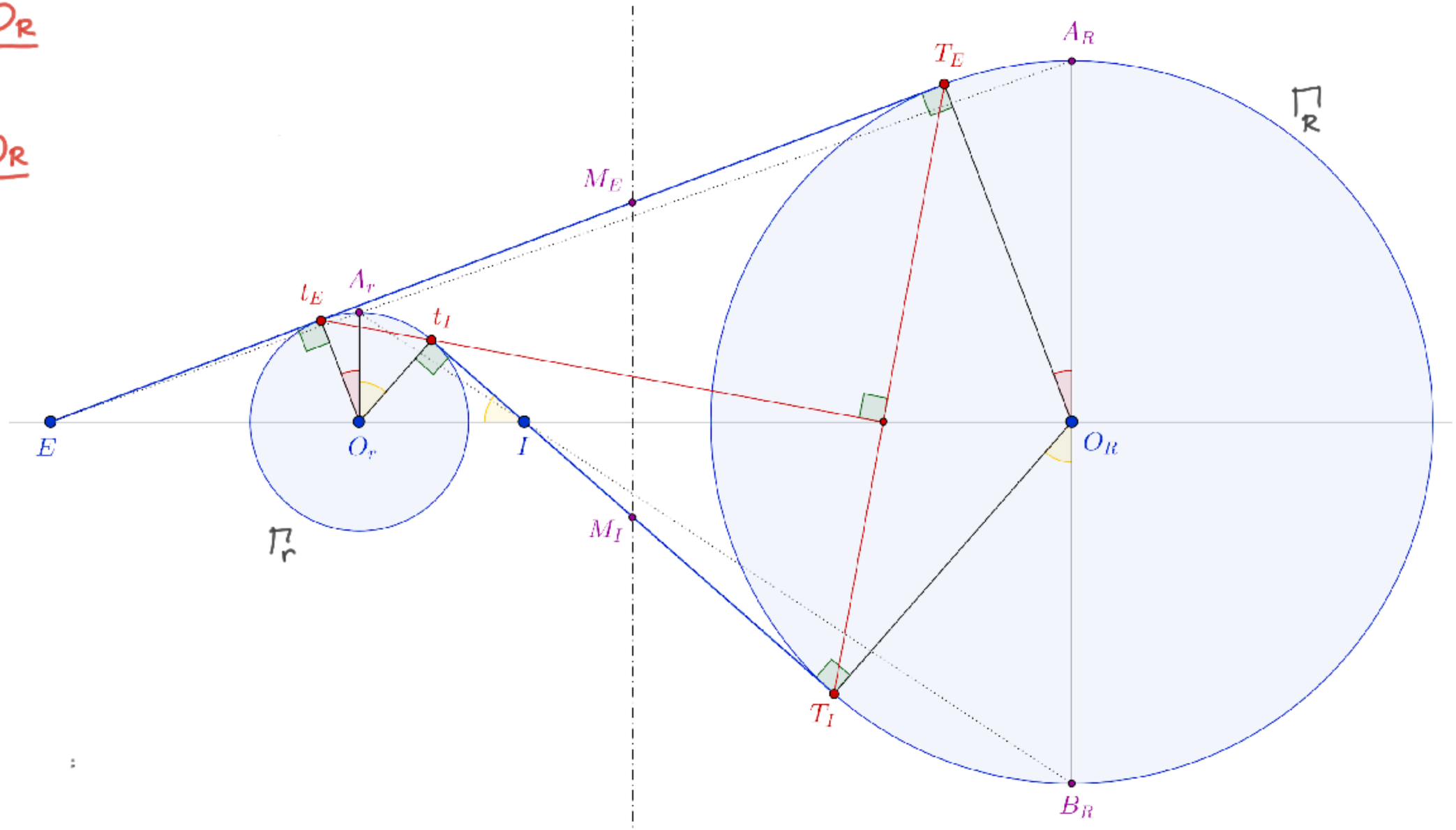
$$E = \frac{RO_r - rO_R}{R-r}$$

$$EO_r = \frac{rd}{R-r}$$

$$O_rI = \frac{rd}{R+r}$$

$$IO_R = \frac{Rd}{R+r}$$

$$EI = \frac{2Rrd}{R^2-r^2}$$



Punto di Torricelli/Fermat/Steiner

Dato un triangolo ABC con angoli $\leq 120°$,

il punto P che minimizza $PA + PB + PC$

A • esiste ed è unico

B • si trova su ciascuno dei segmenti AV_A, BV_B, CV_C (tutti con la medesima lunghezza)

C • si trova su ognuna delle circonferenze circoscritte ai triangoli equilateri costruiti sui lati di ABC

D • congiunto con A, B, C determina angoli di 120°

E • gli assi di PA, PB, PC sono i lati del triangolo di Napoleone $O_A O_B O_C$

A segue dalla convessità della distanza

B segue dalla costruzione di Torricelli (rot. di 60°)

C, D, E seguono dalla sol. già vista del Teorema di Napoleone.