2I - Test sulle competenze iniziali

Testo e soluzioni

Esercizio 1. Quale tra le seguenti frazioni coincide con $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$?

A) $\dfrac{3}{8}$ **B)** $\dfrac{3}{15}$ **C)** $\dfrac{13}{15}$ **D)** $\dfrac{11}{15}$ **E)** nessuna delle precedenti

Poiché $\frac{2}{3}$ può anche essere espresso come $\frac{10}{15}$ e $\frac{1}{5}$ può anche essere espresso come $\frac{3}{15}$, la somma richiesta vale $\frac{13}{15}$.

Esercizio 2. Quale dei seguenti numeri coincide con il doppio di $\sqrt{5}$?

A) $\sqrt{10}$ **B)** $\sqrt{20}$ **C)** $\sqrt{40}$ **D)** 5 **E)** nessuno dei precedenti

Si ha $2\sqrt{5} = \sqrt{4}\sqrt{5} = \sqrt{20}$ dalla definizione e dalle proprietà della radice quadrata.

Esercizio 3. Quale delle seguenti frazioni è soluzione dell'equazione $3(x + 2) = 5(x - 1)$?

A) $\dfrac{3}{2}$ **B)** $\dfrac{1}{2}$ **C)** $-\dfrac{3}{2}$ **D)** $\dfrac{11}{2}$ **E)** nessuna delle precedenti

L'equazione assegnata è equivalente a $3x + 6 = 5x - 5$ o a $2x = 11$, da cui $x = \frac{11}{2}$.

Esercizio 4. Di tre quantità x, y, z sappiamo che $-x + y + z = 9$, $x - y + z = 13$, $x + y - z = 15$. Qual è il valore di y?

A) 11 **B)** 12 **C)** 14 **D)** non è possibile determinarlo **E)** nessuno dei precedenti

Sommando membro a membro le tre identità fornite dal testo si ha $x + y + z = 9 + 13 + 15 = 37$.
A questo punto da $x + y + z = 37$ e $x - y + z = 13$ si ha, per differenza, $2y = 24$ da cui segue $y = 12$.

Esercizio 5. Un triangolo equilatero ha tutti i lati di lunghezza 4.
Quale delle seguenti quantità è più vicina alla misura dell'altezza?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

Osserviamo preliminarmente che di certo la misura dell'altezza non può superare quella del lato, per cui le uniche opzioni ragionevoli sono la **A** e la **B**. Per il Teorema di Pitagora in un triangolo equilatero di lato ℓ la misura di ogni altezza è $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$, che nel nostro caso significa $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$. Per il "trucco" esposto in classe il quadrato di 3.5 è 12.25, che è più grande di 12. Segue che $3 < \sqrt{12} < 3.5$ e che la risposta corretta è la **A**.

Esercizio 6. Un triangolo rettangolo ha cateti lunghi 30 e 40.
Quant'è lunga l'altezza relativa all'ipotenusa?

A) 25 **B**) 20 **C**) 24 **D**) 48 **E**) nessuna delle precedenti

Il doppio dell'area di un triangolo è il prodotto tra le lunghezze di un lato e dell'altezza relativa, indipendentemente dal lato scelto. Se in un generico triangolo rettangolo indichiamo con a, b le lunghezze dei cateti, con c la lunghezza dell'ipotenusa e con h quella dell'altezza relativa all'ipotenusa, abbiamo in particolare che $ab = ch$ è il doppio dell'area, e di conseguenza $h = \frac{ab}{c}$. In virtù del Teorema di Pitagora, nel nostro caso specifico abbiamo $h = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24$.

Esercizio 7. Alberto è l'unico figlio di Giovanna. Attualmente la somma delle età di Alberto e Giovanna è 40 anni. Sappiamo inoltre che tra 5 anni l'età della madre sarà esattamente 4 volte l'età del figlio. Quanti anni aveva Giovanna alla nascita di suo figlio?

A) 20 **B**) 25 **C**) 30 **D**) 35 **E**) nessuna delle precedenti

È sicuramente possibile impostare e risolvere un sistema in due equazioni e due incognite, ma è anche possibile adottare un approccio laterale/inverso nel quale ci si limita a passare in rassegna le opzioni di risposta fornite, fino a realizzare che l'unica che rispetta tutti i vincoli è la **C**: partorendo suo figlio a 30 anni, quando Giovanna ha 35 anni Alberto ne ha 5 (la somma delle età a questo punto vale 40) e quando Alberto ne ha 10 la madre ne ha 40, ossia esattamente il quadruplo.

Esercizio 8. Si determinino le soluzioni dell'equazione $(x+1)^2 + (x+2)^2 = x^2 + (x+5)^2$.

Possiamo immediatamente osservare che, poiché $(3, 4, 5)$ è una terna pitagorica, $x = -5$ è soluzione dell'equazione. Tale soluzione è unica in quanto, per cancellazione dei monomi di secondo grado, l'equazione assegnata è equivalente ad una equazione di primo grado.

Esercizio 9. Nel piano cartesiano sono dati il punto $P(4; 4)$ e la retta r di equazione $y = \frac{x}{2}$.
Si determini l'equazione della retta ℓ parallela ad r e passante da P.

Nel piano cartesiano due rette non verticali né orizzontali sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare. Questo ci dà immediatamente che l'equazione di ℓ deve essere della forma $y = \frac{x}{2} + q$. Affinché questa retta passi da $P(4; 4)$ è necessario che la coppia $(x; y) = (4; 4)$ soddisfi la precedente equazione, da cui $q = 2$ e la risposta $y = \frac{x}{2} + 2$.

Esercizio 10. Quali sono quoziente e resto della divisione intera tra il polinomio $n(x) = x^3 + 1$ e il polinomio $d(x) = x - 2$?

È sicuramente possibile eseguire la divisione in colonna tra i due polinomi, ma visto che $d(x)$ è un polinomio monico di primo grado è pratico determinare *prima* il resto e solo successivamente il quoziente. Dal Teorema di Ruffini si ha infatti che il resto della divisione è $n(2) = 2^3 + 1 = 9$, e a questo punto il quoziente non può che essere

$$\frac{n(x) - 9}{d(x)} = \frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4$$

in virtù dell'identità $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Esercizio 11. Le lunghezze dei lati di un triangolo sono $7, 7, 4$. Si determini l'area del triangolo.

Il triangolo dato è evidentemente isoscele e per il Teorema di Pitagora l'altezza relativa alla base di lunghezza 4 misura $\sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Segue che l'area cercata è $6\sqrt{5} = \sqrt{180} \approx 13.5$.

Esercizio 12. Si determini il massimo comun divisore tra i numeri $a = 2431$ e $b = 1872$.

È possibile venire a capo della questione sia applicando l'algoritmo di Euclide sia fattorizzando le quantità assegnate. Seguendo la seconda strada, osserviamo che in 2431 si ha $2+3 = 1+4$, che garantisce che 2431 sia un multiplo di 11. Si ha in particolare $2431 = 11 \cdot 221$, e poiché $221 = 225-4 = 15^2-2^2 = (15-2)(15+2)$ la fattorizzazione di 2431 è $11 \cdot 13 \cdot 17$. In 1872 si può immediatamente osservare che sia 18 che 72 sono multipli di 9, da cui $1872 = 9 \cdot 208 = 9 \cdot 4 \cdot 52 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 13$. Confrontando le due fattorizzazioni così prodotte si ha che il massimo comun divisore cercato è 13.

Risposte corrette:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	D	B	A	C	C	-5	$2+\frac{x}{2}$	$x^2+2x+4, 9$	$6\sqrt{5}$	13