2I - Verifica 26/02/23 - Soluzioni

Esercizio 1. (12pt) Si determini quali sono le soluzioni della seguente equazione:

$$3(x-1)(x-2) = 5(x-3)(x-2).$$

Soluzione. Si può immediatamente osservare che $x = 2$ annulla sia il termine destro che il sinistro. L'altra soluzione dell'equazione di secondo grado è quella di $3(x-1) = 5(x-3)$, ossia $x = 6$.

Esercizio 2. (13pt) Si determini quali sono le $x \in \mathbb{R}$ che realizzano

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x-3} \geq \frac{4}{3} + \frac{2}{1}.$$

Soluzione. Da come è trascritta la disequazione è evidente che $x = 4$ sia un punto in cui vale l'uguaglianza. A conti fatti la disequazione è equivalente a

$$\frac{(x-4)(2x-3)}{(x-1)(x-3)} \leq 0,$$

con *punti critici* $1, \frac{3}{2}, 3, 4$ che suddividono $\mathbb{R}$ in cinque intervalli. Il segno del quoziente è positivo sull'ultimo intervallo: per alternanza dei segni e comportamento nei punti critici si ha che la soluzione è data da $1 < x \leq \frac{3}{2} \vee 3 < x \leq 4$.

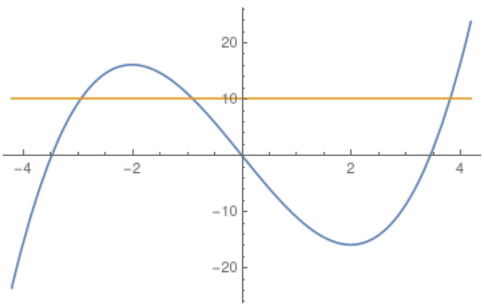
Esercizio 3. (15pt) Dette α e β le soluzioni dell'equazione $x^2 = 5x + 1$, si determini il valore di $\alpha^4 + \beta^4$.

Soluzione. Il discriminante di $x^2 - 5x - 1$ è abbondantemente positivo, dunque α e β sono numeri reali distinti. Per le formule di Viète si ha $\alpha + \beta = 5$ e $\alpha\beta = -1$, da cui

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha\beta) = 5^2 + 2 = 27,$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = 27^2 - 2 = 727.$$

Esercizio 4. (17pt) Si determini **quante** sono le soluzioni reali dell'equazione $x^3 - 12x = 10$.



Soluzione. È sufficiente farsi un'idea chiara della forma del grafico di $f(x) = x^3 - 12x$. Questa è una funzione dispari (ossia con grafico simmetrico rispetto all'origine) e che vale 0 unicamente nell'origine e nei punti $x = \pm 2\sqrt{3}$. Il numero di soluzioni di $f(x) = 10$ è fissato dai valori stazionari di f. Tramite derivate, AM-GM o discriminanti non è difficile stabilire che le ascisse dei punti stazionari sono $x = \pm 2$, dunque i valori stazionari sono ± 16. D'altra parte la determinazione *esatta* dei valori stazionari non è strettamente indispensabile per venire a capo dell'esercizio: è sufficiente osservare che sull'intervallo $[-3, -2]$ la funzione $f(x)$ passa dal valore 9 al valore 16, sull'intervallo $[-1, 0]$ passa da 11 a 0, sull'intervallo $[3, 4]$ passa da -9 a 16. In ognuno di questi intervalli c'è dunque almeno una soluzione dell'equazione di partenza, in quanto il grafico di $f(x) - 10$ non può "teletrasportarsi" da una parte all'altra dell'asse delle ascisse senza attraversarlo (*continuità*). Per Ruffini non possono esserci più di tre soluzioni, dunque le soluzioni sono esattamente 3.

Addendum. Le soluzioni possono essere anche determinate esplicitamente per via trigonometrica. La formula di triplicazione del coseno fornisce $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$, posto dunque $x = 4\cos(\theta)$ si ha $10 = 16\cos(3\theta) = x^3 - 12x$, da cui $x = 4\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{5}{8} + \varphi\right)$ con $\varphi \in \left\{-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

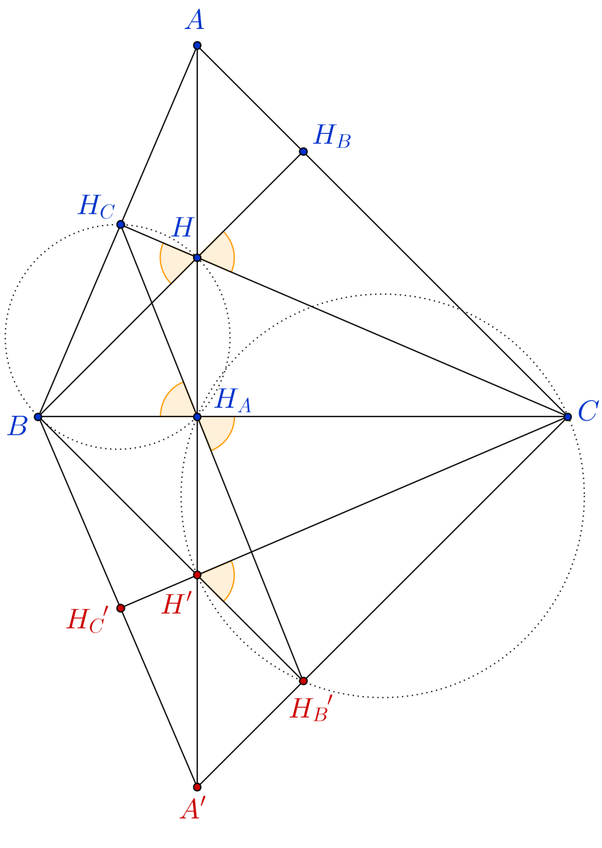
Esercizio 5. (20pt) Si determini il minimo perimetro per un triangolo rettangolo di area 12.

Soluzioni. Dette a e b le lunghezze dei cateti, vogliamo minimizzare $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ sotto i vincoli $a > 0, b > 0$ e $ab = 24$. D'altra parte

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \cdot \mathrm{AM}(a, b) + \sqrt{2} \cdot \mathrm{QM}(a, b) \geq (2 + \sqrt{2}) \cdot \mathrm{GM}(a, b) = (2 + \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{6}$$

con uguaglianza realizzata solo nel caso $a = b$.
Segue che il minimo perimetro cercato è $(2 + \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{6} = 4(\sqrt{3} + \sqrt{6}) \approx 16.726$.

Esercizio 6. (22pt) Dato nel piano un generico triangolo acutangolo ABC, chiamiamo H_A, H_B, H_C i piedi delle altezze rispettivamente uscenti da A, B, C. Il triangolo $H_A H_B H_C$ è detto *triangolo ortico* di ABC. Si dimostri che le altezze di ABC sono bisettrici del triangolo ortico.



Soluzione. È sufficiente procedere di puro *angle chasing*. Detto H l'ortocentro di ABC, denominiamo P' il simmetrico del generico punto P rispetto alla retta BC. Osserviamo che provare che AH_A biseca $\widehat{H_B H_A H_C}$ è equivalente a provare che H_C, H_A, H'_B sono allineati. Osserviamo inoltre che per la moltitudine di angoli retti determinati dalle altezze, B, H_A, H, H_C si trovano sulla circonferenza di diametro BH, mentre C, H_A, H', H'_B si trovano sulla circonferenza di diametro CH. Portiamo ora "a spasso" l'angolo $\widehat{H_C H_A B}$: in primo luogo questo coincide con $\widehat{BHH_C}$, in quanto entrambi insistono sull'arco BH_C. Per angoli opposti al vertice, ci possiamo spostare su $\widehat{CHH_B}$. Poiché ogni simmetria è una mappa conforme, ci possiamo spostare su $\widehat{H'_B H' C}$, infine su $\widehat{H'_B H_A C}$ poiché entrambi insistono su CH'_B. Questo prova l'allineamento di H_C, H_A, H'_B e il discorso per i restanti piedi delle altezze è perfettamente analogo.