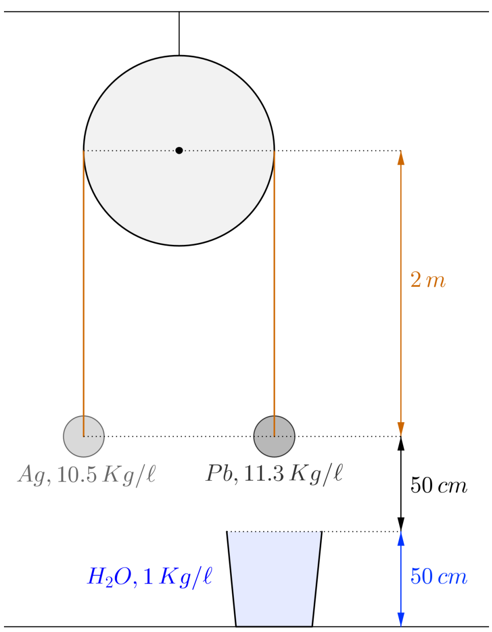
Verifica del 01/03/24 - Soluzioni

Esercizio 1. (15pt) La curva più stretta di una strada in pianura ha un raggio di $20\,m$. Quale deve essere il limite di velocità su tale strada (in Km/h) se vogliamo che i guidatori rispettosi del limite non siano mai sottoposti ad accelerazioni laterali superiori a g ?

Soluzione. Un guidatore che percorre una curva di raggio R a velocità v è soggetto ad un'accelerazione centrifuga di modulo $\frac{v^2}{R}$. Se vogliamo che tale accelerazione non superi g, deve aversi $v \leq \sqrt{Rg}$, ossia $v \leq 50.91\,Km/h$.

Esercizio 2. (20pt) Jack fa roteare il suo mazzo di chiavi, sostenuto da una cordina lunga $50\,cm$, in modo che la cordina formi costantemente un angolo di $45°$ con il piano orizzontale. Se la massa del mazzo di chiavi è $120\,g$, qual è la tensione della cordina? E quante rotazioni compie il mazzo di chiavi in un minuto?

Soluzione. Sul mazzo di chiavi agiscono due forze reali (peso, tensione della corda) e una apparente. A causa della configurazione geometrica si ha che il modulo della forza centrifuga uguaglia il modulo del peso e il modulo della tensione risulta $\sqrt{2}$ volte il peso, da cui $T = \sqrt{2}Mg \approx 1.7\,N$. La velocità angolare è fissata da $\omega^2 R = g$ e il raggio R della traiettoria è la lunghezza della corda divisa per $\sqrt{2}$.
Seguono $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{L}}$ e $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\sqrt{2}}} \approx 1.18\,s$.
In particolare il mazzo di chiavi compie poco meno di 51 rotazioni in un minuto.



Esercizio 3. (30pt) Alle estremità di una macchina di Atwood si trovano due sferette di identico e piccolo diametro, a sinistra d'argento (densità $10.5\,Kg/\ell$) e a destra di piombo (densità $11.3\,Kg/\ell$), inizialmente alla stessa altezza da terra e sostenute entrambe da $2\,m$ di fune. $50\,cm$ al di sotto della sferetta di piombo si trova un secchio colmo d'acqua (densità $1\,Kg/\ell$) profondo $50\,cm$. Supponendo che l'immersione (o l'emersione) della massa di piombo in acqua non trovi resistenza e non causi schizzi, si determini

- in quanto tempo la massa di piombo tocca la superficie dell'acqua
- fino a che profondità (dalla superficie) si inoltra la massa di piombo in acqua
- cosa avviene dopo l'emersione della massa di piombo dall'acqua, in particolare se viene raggiunta una configurazione di equilibrio in tempo finito.

Soluzione. Le due sfere hanno identico volume, dunque il rapporto delle loro masse è il rapporto delle loro densità. Per la meccanica della macchina di Atwood si ha dunque che, fin tanto che la massa di piombo è fuori dall'acqua, questa viaggia con accelerazione $\frac{11.3-10.5}{11.3+10.5}\,g = \frac{4}{109}\,g$ diretta verso il basso, mentre la massa

d'argento viaggia con accelerazione opposta. La massa di piombo entra dunque a contatto con l'acqua in un tempo $\sqrt{\frac{1\,m}{\frac{4g}{109}}} \approx 1.65\,s$ con velocità $\sqrt{\frac{4g\cdot 1m}{109}} \approx 0.606\,\frac{m}{s}$. Quando la massa di piombo è immersa, la spinta di Archimede riduce virtualmente la sua densità a $10.3\,Kg/\ell$, dunque le accelerazioni in gioco cambiano sia verso che intensità. Quest'ultima diviene $\frac{10.5-10.3}{10.5+11.3}\,g = \frac{g}{109}$, ossia esattamente un quarto di quella presente nella fase emersa. Ciò significa che se la massa di piombo non incontrasse il fondo del secchio, procederebbe dalla superficie verso il basso per un tempo pari a circa $6.6\,s$, fino a raggiungere una profondità di esattamente $2\,m$. Tuttavia l'altezza del secchio è ben minore di $2\,m$, dunque a un certo punto (circa $0.885\,s$ dal primo contatto con la superficie) la massa di piombo urta il fondo del secchio, la fune perde di tensione, la massa d'argento si trova per breve tempo in ascesa e subito dopo in caduta libera, la tensione della fune si ristabilisce, entrambe le masse ritrovano velocità piccole e concordi con la loro accelerazione. Tra gli istanti che precedono e quelli che seguono l'urto è inevitabile che il sistema dissipi energia, ma non conoscendo le caratteristiche di (an)elasticità dell'urto e avendo trascurato ogni effetto idrodinamico, non possiamo far molto di meglio che "resettare" il sistema dalla configurazione in cui la massa di piombo di trova sul fondo del secchio (o poco al di sopra) con velocità circa nulla rivolta verso l'alto e accelerazione $\frac{g}{109}$ anch'essa rivolta verso l'alto.
Considerando quest'ultima come nuova configurazione iniziale, la massa di piombo riemerge in un tempo pari a $\approx 3.3\,s$ con velocità $\approx 0.3\,\frac{m}{s}$. In fase emersa la massa di piombo è accelerata verso il basso con intensità $\frac{4g}{109}$, arrivando in tempo $\approx 0.825\,s$ ad un'altezza di $\approx 12.5\,cm$ dalla superficie con velocità nulla. Da qui in avanti, in assenza di dissipazioni energetiche, il moto è puramente periodico, nonostante sia spazialmente e temporalmente asimmetrico rispetto all'attraversamento della superficie. In particolare non viene raggiunta alcuna configurazione di equilibrio.