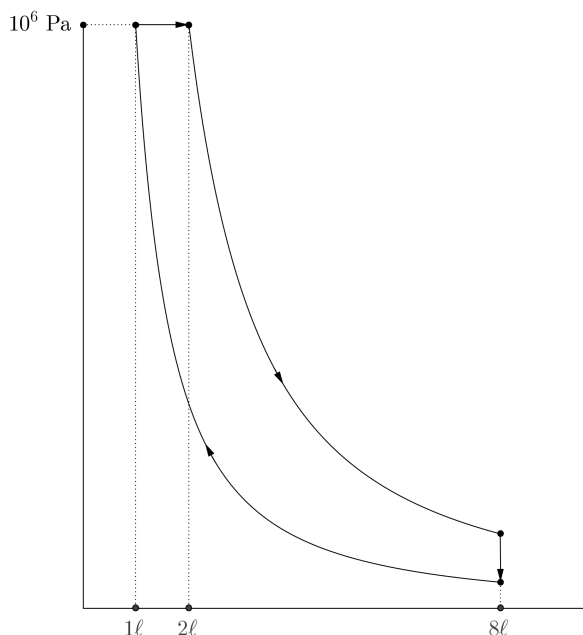


4I - Verifica del 13/03/24 - Soluzioni



Esercizio 1. (20pt) In figura è rappresentato un ciclo Diesel per un gas biatomico ideale ($\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$). Dalle informazioni in figura si determini l'efficienza del motore, ossia il rapporto tra il lavoro svolto in un ciclo e il calore assorbito nella fase isobara.

Esercizio 2. (16pt) La distribuzione di Maxwell fornisce la densità di probabilità della velocità per le molecole di un gas ideale a temperatura T :

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right).$$

Per una mole di gas monoatomico ideale a temperatura $T = 400 \text{ K}$ si stimi accuratamente la percentuale delle molecole con una velocità compresa tra la velocità più probabile e la velocità quadratica media.

Esercizio 3. (12pt) All'interno di una stanza $6 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ si trova un frigorifero con capienza 1500ℓ che preleva dalla rete elettrica 4000 J ogni ora. La stanza è termicamente isolata e Jack ha sbadatamente lasciato l'anta del frigo spalancata. Sapendo che la densità dell'aria è $1.225 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ e la capacità termica dell'aria è $1000 \frac{\text{J}}{\text{Kg}\cdot\text{K}}$, cosa accade quando Jack fa ritorno nella stanza, due ore dopo aver commesso l'ultima sua sbadataggine? Trova la stanza più calda o più fredda? E di quanto?

Soluzione Esercizio 1. Per la prima legge della Termodinamica il lavoro svolto dal gas durante un ciclo è la differenza tra il calore assorbito nella fase isobara e il calore ceduto nella fase isocora. Etichettando i vertici del ciclo con 1, 2, 3, 4 in senso orario, a partire dalla configurazione di minimo volume, abbiamo dunque che il rendimento cercato è

$$R = 1 - \frac{Q_{out}}{Q_{in}} = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_4}{T_1} \right) \frac{T_3/T_4 - 1}{T_2/T_1 - 1}.$$

Poiché $1 \rightarrow 2$ è isobara si ha $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = 2$. Poiché $4 \rightarrow 1$ è adiabatica si ha $p_4 V_4^\gamma = p_1 V_1^\gamma$, da cui $\frac{p_4}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_4} \right)^\gamma$ e $\frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_4} \right)^{\gamma-1} = 2^{-6/5}$. Poiché $3 \rightarrow 4$ è isocora si ha $\frac{T_3}{T_4} = \frac{p_3}{p_4}$. D'altra parte $p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma$ e $p_4 V_4^\gamma = p_1 V_1^\gamma$ comportano

$$\frac{p_3}{p_4} = \frac{p_2 (V_2/V_3)^\gamma}{p_1 (V_1/V_4)^\gamma} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = 2^{7/5},$$

pertanto il rendimento è

$$R = 1 - \frac{5}{7} \cdot 2^{-6/5} \cdot (2^{7/5} - 1) \approx 49.04\%,$$

prossimo al massimo rendimento tecnicamente raggiunto per un motore Diesel reale.

Soluzione Esercizio 2. Dalla teoria sappiamo che la velocità di moda è data da $\sqrt{2RT/M}$ mentre la velocità quadratica media è data da $\sqrt{3RT/M}$. A meno di riscaldare le unità di misura si ha dunque che quanto richiesto è, in termini esatti,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} v^2 e^{-v^2/2} dv.$$

La funzione $f(v) = v^2 e^{-v^2/2}$ è estremamente regolare e presenta in $v = \sqrt{2}$ un massimo assoluto. Per la formula di Archimede sull'area del segmento parabolico la probabilità cercata è molto bene approssimata da

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \frac{2f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3})}{3} \approx 18.1\%.$$

Questo evidenzia il fatto che la distribuzione di Maxwell (come anche la distribuzione normale) abbia delle ampie code, e che per le molecole di un gas avere una velocità *normale* (nel senso di appartenente all'intervallo $[v_{\text{moda}}, v_{\text{qm}}]$) sia un evento relativamente poco probabile.

Soluzione Esercizio 3. Per la seconda legge della Termodinamica un frigorifero non può convertire *tutta* l'energia che preleva dalla rete elettrica in una variazione di temperatura del suo contenuto.

In particolare, già in condizioni standard un frigorifero (tanto quanto un ventilatore in azione) *riscalda* la stanza entro cui si trova. Quando l'anta di un frigorifero domestico viene lasciata spalancata l'efficienza della macchina termica si riduce a zero, facendo sì che la totalità dell'energia prelevata dalla rete elettrica sia convertita in calore ceduto alla stanza. L'effetto contrario, dovuto alla diffusione dell'aria inizialmente contenuta all'interno del frigo nella stanza, è assolutamente trascurabile, visto che il volume del frigo è appena l'1% del volume della stanza. E se supponiamo che 8000 J di calore siano trasferiti a 144 m³ di aria (aventi massa 176.4 Kg) otteniamo un riscaldamento di circa $\frac{1}{22}^\circ\text{C}$.
