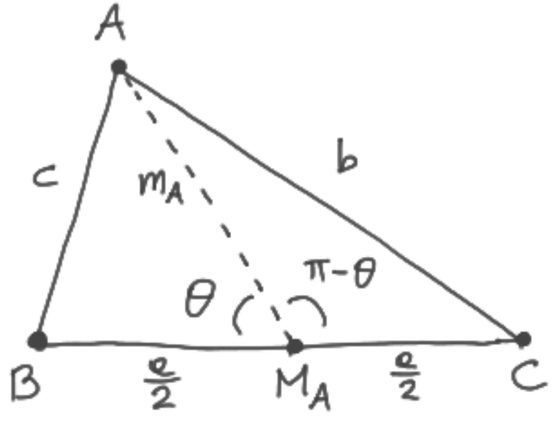
Problema: le mediane di un triangolo ABC misurano 5, 6, 7. Qual è l'area del triangolo?

Elaboriamo un attacco:

1• dai lati alle mediane — Apollonio

unica idea "autoctona" → 2• dalle mediane ai lati — Noi

3• dai lati all'area — Erone, Archimede



Memento 1. Dal Teorema del coseno $(\cos\theta + \cos(\pi-\theta) = 0)$ o dalla formula di polarizzazione si ha che

$$4\, m_A^2 = -a^2 + 2b^2 + 2c^2 \quad \text{e analoghe.}$$

In termini di matrici o applicazioni lineari

$$4\begin{pmatrix} m_A^2 \\ m_B^2 \\ m_C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix}$$

dunque per venire a capo di 2• basta risolvere un sistema altamente simmetrico.

Oss: la matrice coinvolta è 3 volte una matrice di rotazione (isometria)

2 • Sommando membro a membro le precedenti equazioni otteniamo $(a^2+b^2+c^2) = \frac{4}{3}(m_A^2+m_B^2+m_C^2)$

da cui possiamo dedurre

$$9\begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_A^2 \\ m_B^2 \\ m_C^2 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo inoltre che $m_A^2 - m_B^2 = \frac{3}{4}(b^2-a^2)$ e analoghe. Questo comporta

$$2(a^4+b^4+c^4) = (a^2+b^2+c^2)^2 + (c^2-b^2)^2 + (b^2-a^2)^2 + (a^2-c^2)^2$$

$$= \frac{16}{9}\left((m_A^2+m_B^2+m_C^2)^2 + (m_B^2-m_C^2)^2 + (m_A^2-m_B^2)^2 + (m_C^2-m_A^2)^2\right)$$

da cui $(a^2+b^2+c^2)^2 = \frac{16}{9}(m_A^2+m_B^2+m_C^2)$ nonché $(a^4+b^4+c^4) = \frac{16}{9}(m_A^4+m_B^4+m_C^4)$.

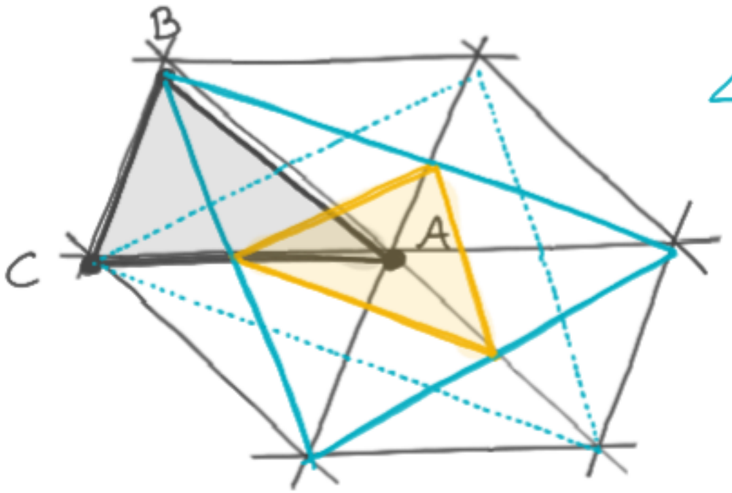
3 • Dalla formula di Archimede $16\Delta^2 = (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)$

segue che quanto richiesto è semplicemente $\frac{4}{3}$ dell'area di un triangolo di lati 5, 6, 7,

ossia

$$\frac{1}{3}\sqrt{18\cdot 13\cdot 12\cdot 11} = \sqrt{858}.$$

We first use our experience ...



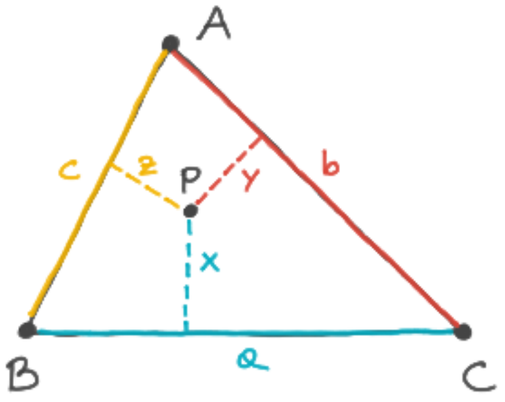
...then do better.

4• Tutti i calcoli nella precedente slide sono immediata conseguenza di semplici osservazioni sulla configurazione a lato:

4.1: i lati del triangolo giallo sono lunghi quanto le mediane del triangolo nero;

4.2: l'area dell'esagono coincide con quella di 6 triangoli neri o di 8 triangoli gialli;

4.3: medesima conclusione del punto 3• precedente.



Avanti il prossimo (dell'allenamento "hard" del 12/2/24)

ABC è un triangolo acutangolo di area 300 e P è il punto interno che massimizza il prodotto delle distanze dai lati. Sapendo che tale prodotto vale 1000, quanto vale il prodotto delle lunghezze dei lati?

Soluzione: chiamiamo a, b, c le lunghezze dei lati e x, y, z le distanze di P dai lati.

Cerchiamo dunque il massimo di xyz sul vincolo dato da $x, y, z \geq 0$ e $ax + by + cz = 2\Delta$.

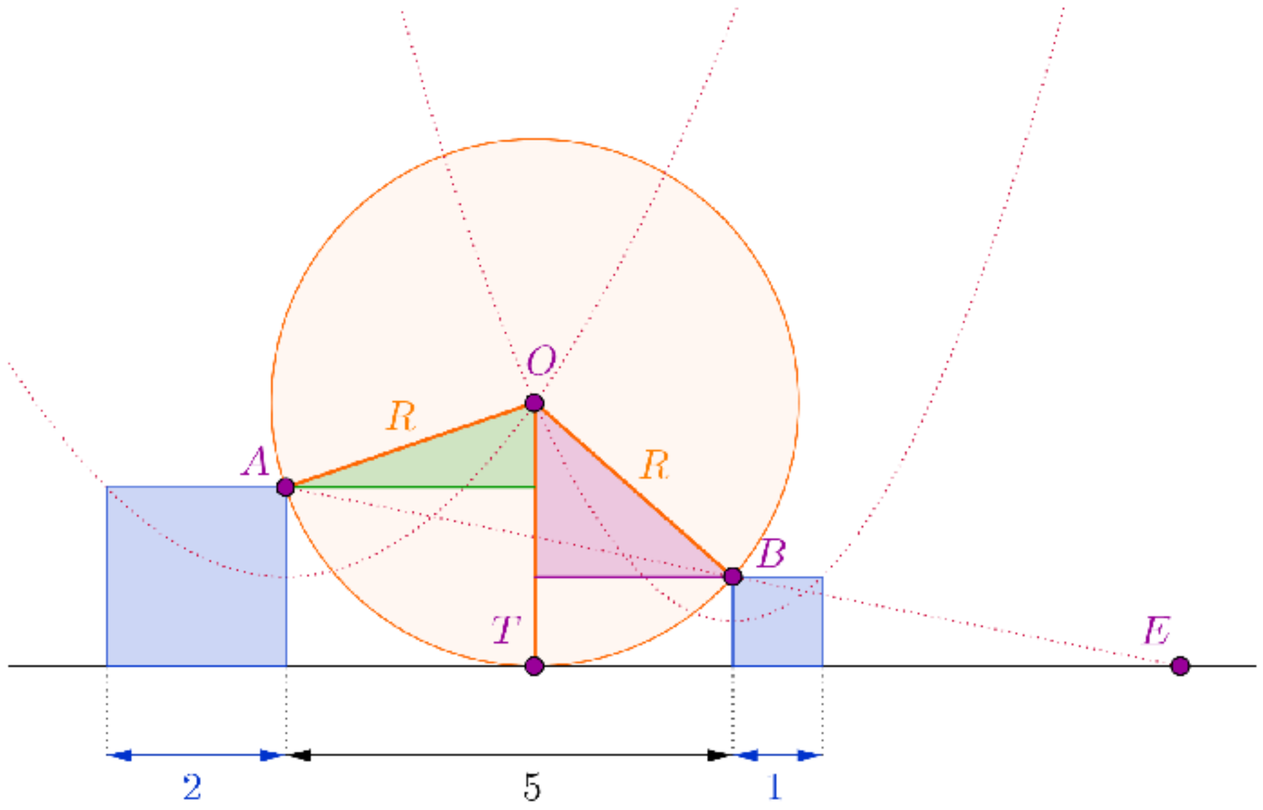
Per AM-GM $\quad xyz = \frac{1}{abc}(ax \cdot by \cdot cz) = \frac{1}{abc} GM^3(ax, by, cz) \leq \frac{1}{abc} AM^3(ax, by, cz)$,

dunque $xyz \leq \frac{1}{abc}\left(\frac{2\Delta}{3}\right)^3$ con uguaglianza realizzata solo quando $ax = by = cz$,

ossia quando P coincide con il **baricentro** di ABC. In tal caso

$$abc = \frac{1}{xyz}\left(\frac{2\Delta}{3}\right)^3 = 8000.$$

Apprendiamo così che il baricentro, oltre ad essere il punto che minimizza il momento d'inerzia $PA^2 + PB^2 + PC^2$, è anche il punto interno che massimizza il prodotto delle distanze dai lati.



Problema del 2/3/24

Una colonna di marmo è adagiata al suolo e incastrata tra supporti quadrati come descritto in figura. Qual è il suo raggio R ?

Soluzione #1 (equazione irrazionale)

Applicando Pitagora ai triangoli rettangoli in verde e viola giungiamo a

$$2\sqrt{R-1} + \sqrt{2R-1} = 5 \qquad (1)$$

dove ci interessa l'unica soluzione $R > \frac{5}{2}$.

Da (1) segue $4(R-1)+(2R-1)+4\sqrt{(R-1)(2R-1)} = 25$, equivalente a $2\sqrt{(R-1)(2R-1)} = 3(5-R)$, che a sua volta comporta $4(R-1)(2R-1) = 9(5-R)^2$. (2) Semplificando si ha $R^2 - 78R + 221 = 0$, da cui $R = 39 \pm 10\sqrt{13}$. La soluzione più grande è da scartare poiché corrisponde ad un punto T che giace all'esterno del segmento delimitato dalle proiezioni di A e B.

Soluzione #2 (parabole) Il punto O deve trovarsi alla stessa distanza da A, da B e dal suolo. Come vedremo a breve, il luogo dei punti O equidistanti da A e dal suolo è una parabola con asse verticale, grafico di un polinomio di secondo grado, in cui il coefficiente di testa a soddisfa $\frac{1}{2a} = d(A, \text{suolo}) = 2$. Nel riferimento in cui il suolo è l'asse delle ascisse e il punto A cade in $(0;2)$ abbiamo che, ragionando analogamente per B, le coordinate di O soddisfano

$$* \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \\ y = \frac{1}{2}(x-5)^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

dunque l'ascissa del punto T soddisfa

$$\frac{1}{4}x^2 + 1 = \frac{1}{2}(x-5)^2 + \frac{1}{2} \quad \text{con} \quad x \in (0,5).$$

L'unica soluzione geometricamente accettabile è $x = 2(5-\sqrt{13})$, che comporta (via $*$)

$$R = (5-\sqrt{13})^2 + 1 = 39 - 10\sqrt{13}.$$

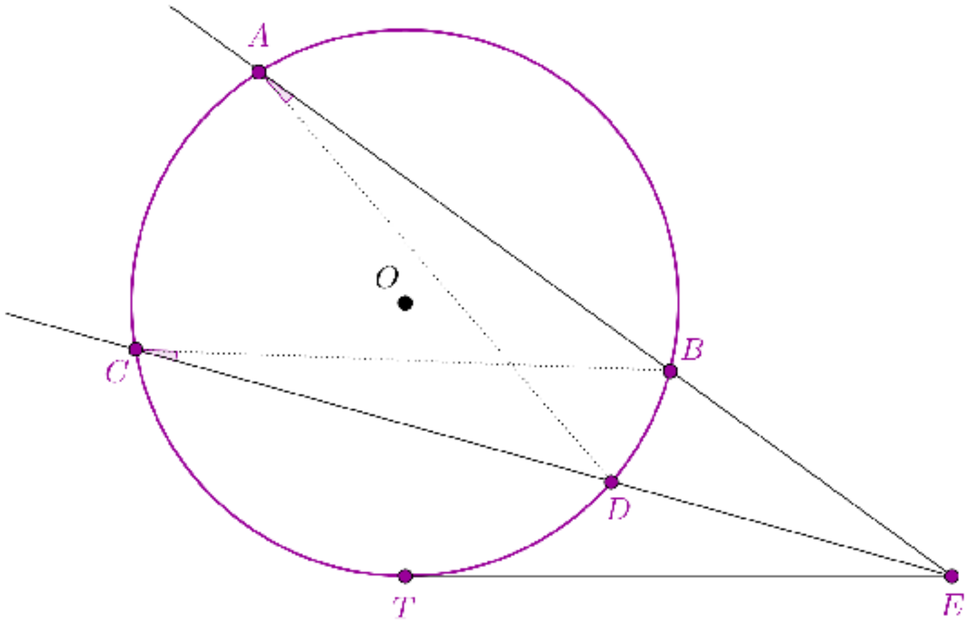
Nota: alla rovescia, qualunque equazione di 2° grado è interpretabile come problema di "incastro di una colonna tra sostegni" !

Soluzione #3 (secante-tangente-potenza) Detta E l'intersezione di AB con il suolo, per le proprietà della circonferenza deve aversi $ET^2 = EB \cdot EA = 2\,AB^2 = 52$.

Da questo segue $ET = 2\sqrt{13}$, dunque T dista rispettivamente $10 - 2\sqrt{13}$ e $2\sqrt{13} - 5$ dalle proiezioni di A e B sul suolo. Per le relazioni che sussistono tra i lati del triangolo viola

$$\sqrt{2R-1} = 2\sqrt{13} - 5 \quad \text{comporta} \quad 2R - 1 = 77 - 20\sqrt{13}$$

$$\text{da cui} \quad R = 39 - 10\sqrt{13}.$$



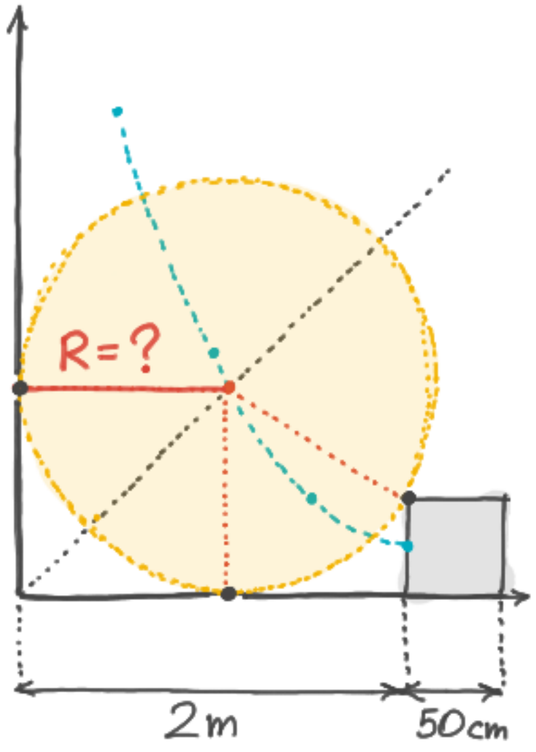
Dalla similitudine tra EBC e EDA segue

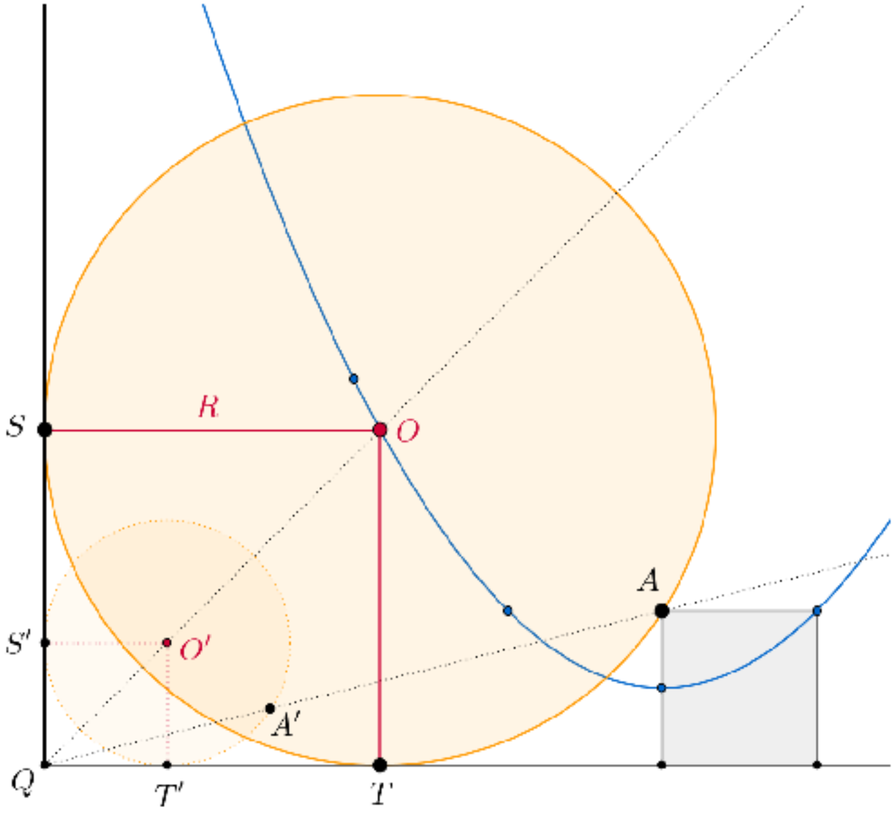
$$ED/EA = EB/EC \longleftrightarrow EB \cdot EA = ED \cdot EC.$$

Questo prodotto* è invariato per qualunque secante passante da E. Nel caso-limite di una tangente si ha $EB \cdot EA = ET^2$.

* Anche detto POTENZA di E rispetto alla circonferenza.

Esercizio 416 p520
equivalente



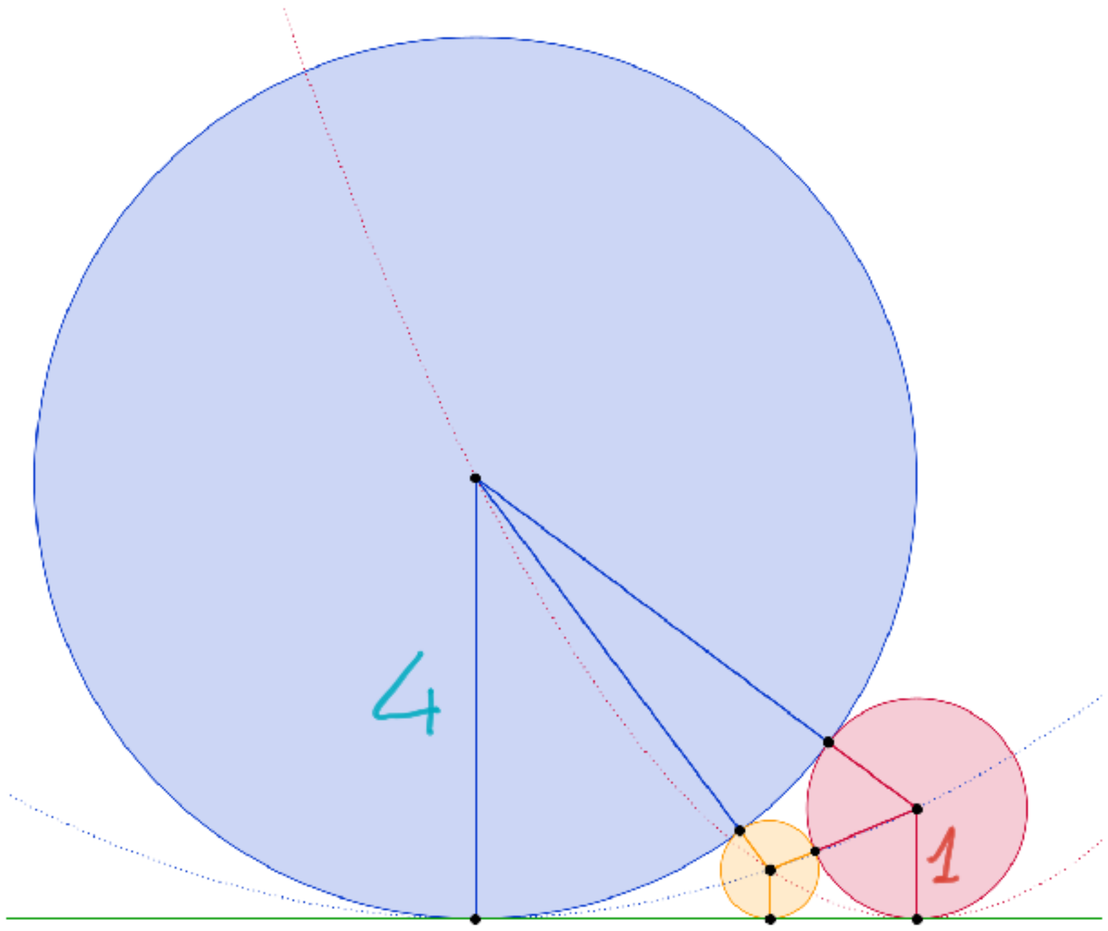


Qual è il raggio della circonferenza nel 1° quadrante che tange gli assi e passa da $A(4;1)$?

Soluzione #1: è la più piccola soluzione di $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-4)^2$, poiché il centro O appartiene sia ad una fissata parabola che alla bisettrice del 1° quadrante.

Soluzione #2: consideriamo una piccola circonferenza che tange gli assi e la dilatiamo rispetto all'origine Q finché non passa da A.

Soluzione #3: scriviamo l'equazione di una circonferenza di centro $(R;R)$ e raggio R e imponiamo il passaggio dal punto $A(4;1)$.



Un problema caro sia ad Archimede che ad Apollonio che a Cartesio...

Se il raggio del cerchio blu vale 4 e il raggio del cerchio rosso vale 1, quanto misura il raggio del cerchio giallo?

Approccio #1: intersezione di parabole

Approccio #2: equazione irrazionale

Qualunque approccio si segua, la conclusione a cui si giunge è la seguente: definita la curvatura K come il reciproco del raggio,

$$\sqrt{K_3} = \sqrt{K_2} + \sqrt{K_1}$$

che nel nostro caso comporta $R_3 = 4/9$.

Caso particolare del Teorema dei 4 cerchi di Cartesio.

Problema difficile del 12/3 (accenno alle eq. di 4° grado)

Per quali $k \in \mathbb{R}$ le radici del polinomio $x^2 - 2kx + (k^2 - k + 1)$ sono le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo con inraggio unitario?

Prologo. Innanzitutto le radici devono esistere ed essere entrambe positive, il che si traduce in $\Delta \geq 0$, $2k > 0$ e $k^2 - k + 1 > 0$, o più semplicemente $k \geq 1$.

Un triangolo rettangolo con cateti a, b ha inraggio 1 sse $ab = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dalle formule di Viète si ha $a + b = 2k$ e $ab = k^2 - k + 1$, dunque

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2(ab) = 2k^2 + 2k - 2$ e il problema si riduce a determinare le soluzioni ≥ 1 dell'equazione

$$k^2 - k + 1 = 2k + \sqrt{2k^2 + 2k - 2}$$

equivalente a

$$k^2 - 3k + 1 = \sqrt{2k^2 + 2k - 2}$$

da cui discende

$$(k^2 - 3k + 1)^2 = 2k^2 + 2k - 2$$

equivalente a

$$k^4 - 6k^3 + 9k^2 - 8k + 3 = 0.$$

... e ora?

Idea. Se riuscissimo ad esprimere l'ultimo polinomio come

$$(k^2+gk+h)^2-(Gk+H)^2$$

Credits: Ferrari, Mascheroni

avremmo sostanzialmente concluso, in quanto da $u^2-v^2=(u-v)(u+v)$ otterremmo due fattori di secondo grado e di conseguenza tutte le radici.

Nel caso generale i valori di g, h, G, H sono fissati dalle soluzioni di una cubica, nel caso in analisi siamo un po' più fortunati.

Implementazione. Comparando gli opportuni coefficienti non è difficile capire che nel nostro caso deve aversi $g=-3$ e $h=2$. Poiché

$$(k^2-3k+2)^2-(k^4-6k^3+9k^2-8k+3) = 4k^2-4k+1 = (2k-1)^2$$

bingo!

abbiamo
$$\begin{aligned}(k^4-6k^3+9k^2-8k+3) &= (k^2-3k+2)^2-(2k-1)^2\\ &= (k^2-k+1)(k^2-5k+3)\end{aligned}$$

e da qui è tutto in discesa: l'unica soluzione accettabile è $K=(5+\sqrt{13})/2$.

Che fatica, però!

Dalle Olimpiadi tedesche: quali sono le soluzioni di $\sqrt[3]{x+13}-\sqrt[3]{x-13}=2$?

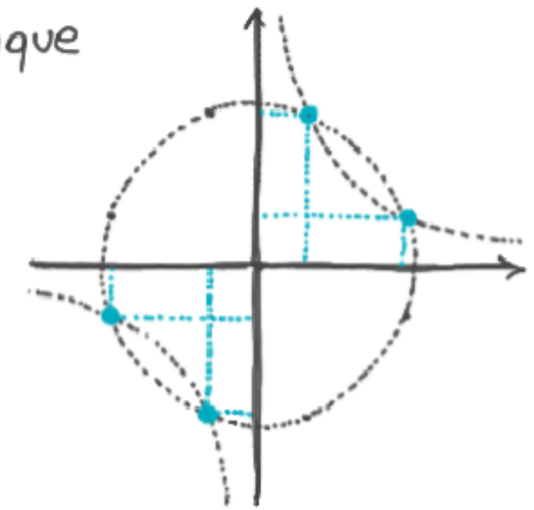
Soluzione. Per convenienza poniamo $a=\sqrt[3]{x+13}$ e $b=\sqrt[3]{x-13}$. Abbiamo allora $a-b=2$, $a^3-b^3=26$ e $a^3+b^3=2x$, dunque il problema è analogo a ricostruire a^3+b^3 a partire da $a-b$ e a^3-b^3. Osserviamo che

$$\begin{cases} a^3-b^3=26 \\ a-b=2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a^2+ab+b^2=13 \\ a^2-2ab+b^2=4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ab=3 \\ a^2+b^2=10 \end{cases}$$

e abbiamo così ottenuto un sistema simmetrico, palesemente risolto solo da quattro coppie $(a;b)$, fissate dalle intersezioni tra una circonferenza ed una iperbole equilatere concentriche. Equivalentemente, da $(a+b)^2=16$ segue $a+b=\pm 4$, dunque

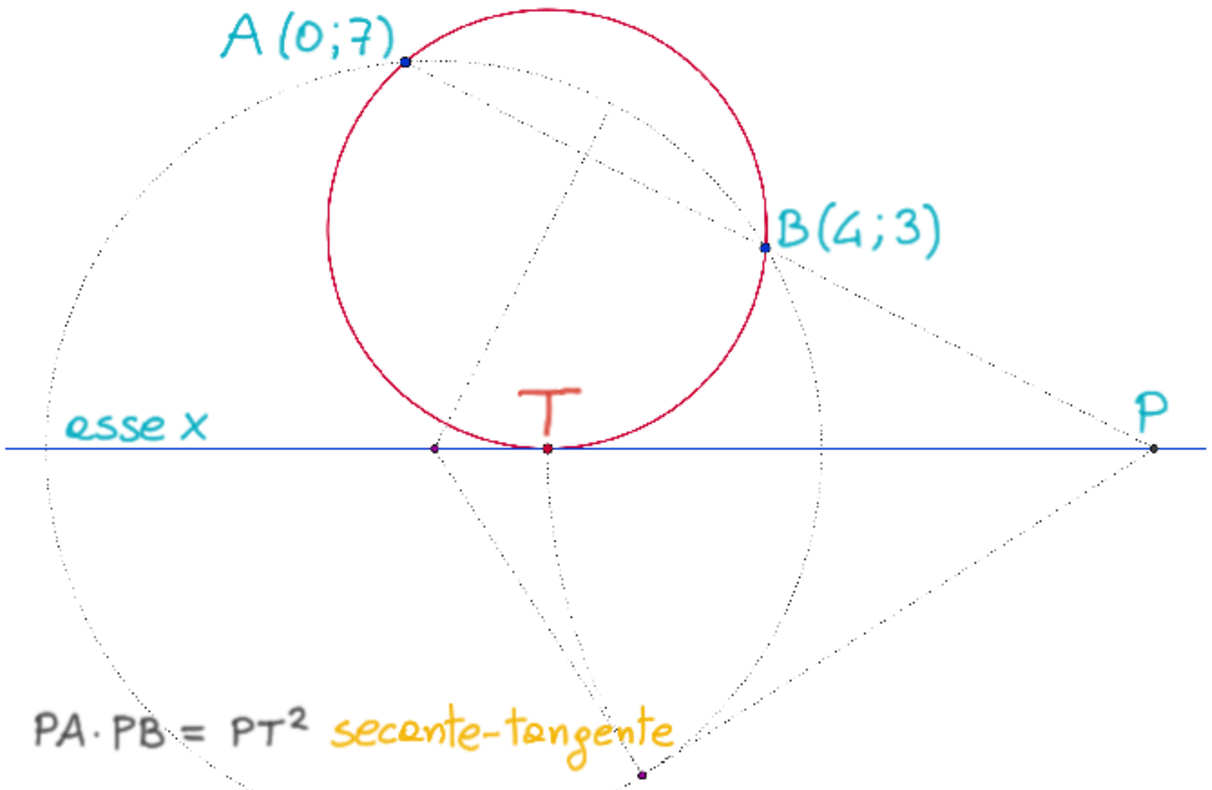
$$a^3+b^3=(a+b)((a+b)^2-3ab)=\pm 4\,(16-9)$$

e $x=\pm 14$.



Apollonio once again

Qual è il raggio della più piccola circonferenza che passa da $(0;7)$ e $(4;3)$ e tange l'asse delle ascisse? Suggerimenti in figura.

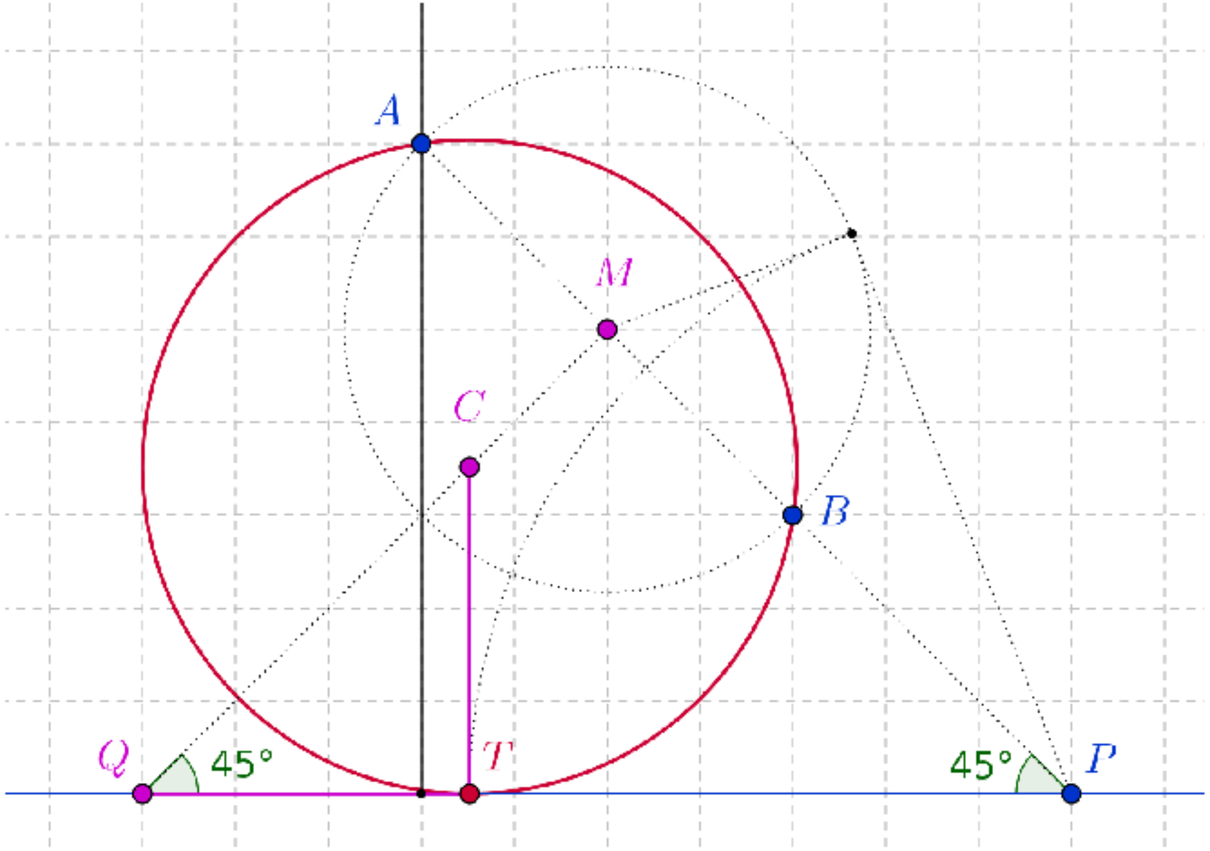


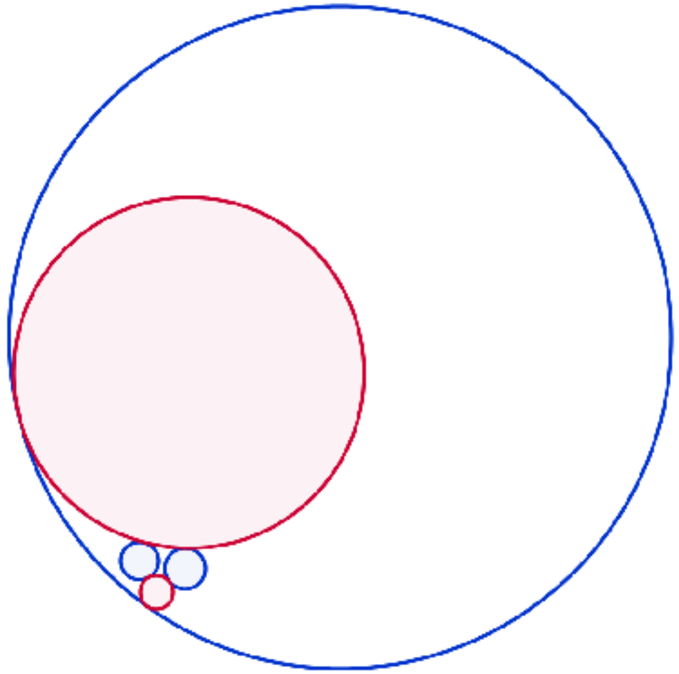
$PA \cdot PB = PT^2$ secante-tangente

$4R_{ABT} = AB \cdot BT \cdot TA / [ABT]$ Eulero

Approccio visto a lezione: $PT^2 = PA \cdot PB = 42$ fornisce $PT = \sqrt{42}$, C sta sia sulla verticale per T che sull'asse di AB, $\widehat{APQ} = \widehat{PQC} = 45°$, $R = CT = QT = QP - PT$

$= 10 - \sqrt{42}$



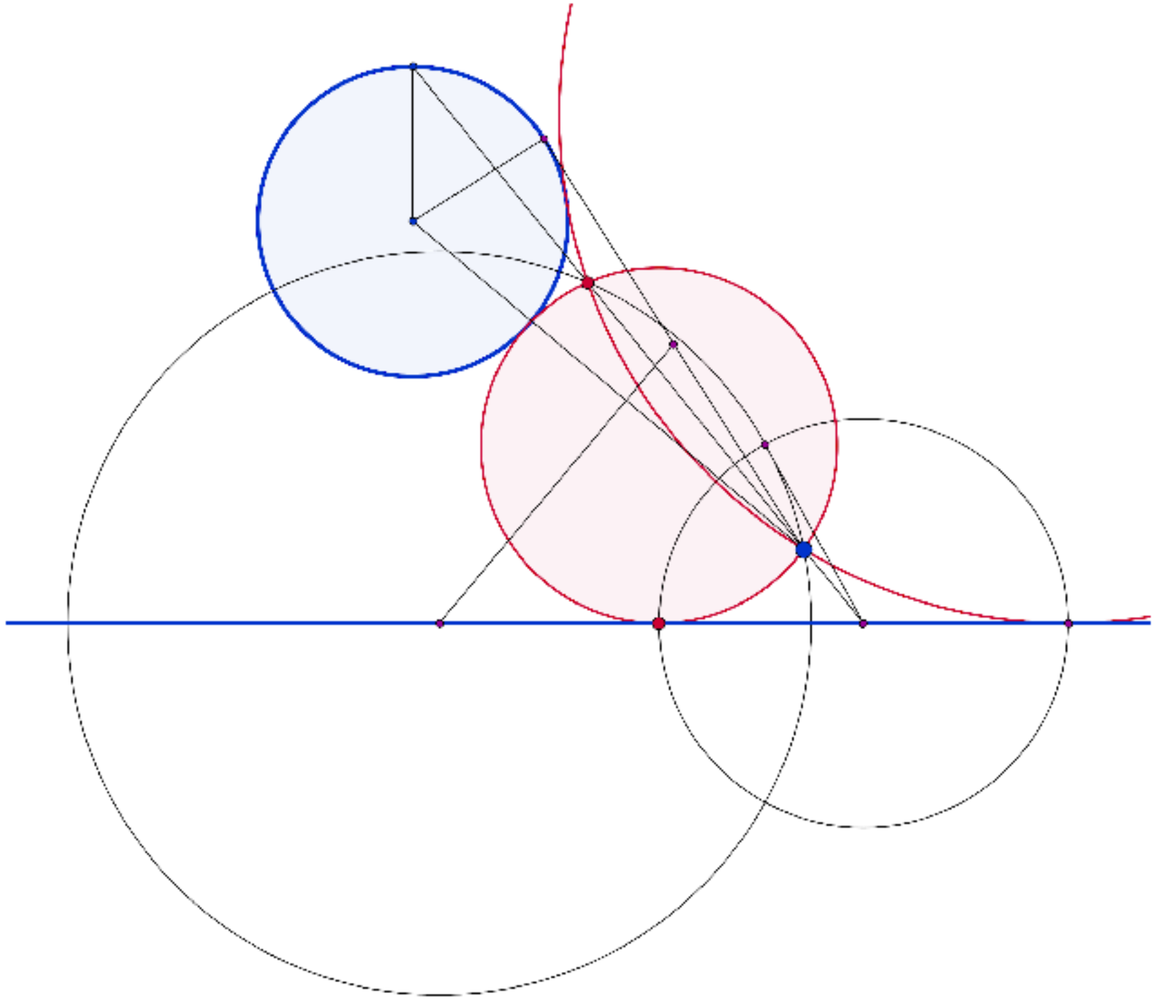


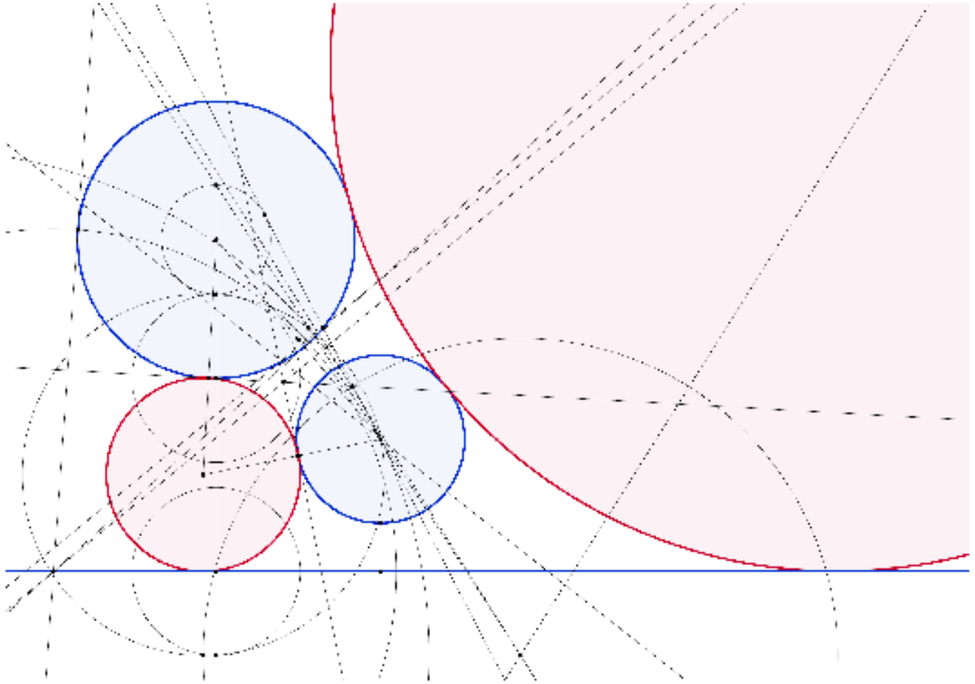
Problema di Apollonio

Circonferenza/e tangente e 3 circonferenze date.

Si riduce, via inversione, al problema di trovare la/le circonf. tangenti ad una retta e due circonferenze date.

Per riduzione dei raggi, si riconduce al problema (*)





inversione circolare, potenze ed assi radicali

intersezione di parabole con assi verticali

Problema (*) Dati una circonferenza, una retta ed un punto, determinare le circonferenze passanti dal punto e tangenti sia alla retta che alla circonferenza iniziale.

Miscellanea di Algebra (tricky)

P1. Quali sono le sol. di $\dfrac{x^7+x^5+x^3}{x^6+x^5+x^4} = 4$?

P2. Quali sono le sol. di $(3z+1)(4z+1)(6z+1)(12z+1) = 2$?

P3. Quali sono le sol. di $\begin{cases} x+\sqrt{x} = x/y \\ y+\sqrt{y} = y/x \end{cases}$?

P4. Quali sono le sol. di $\dfrac{(3x-5)^5-(2x-3)^5-(x-2)^5}{(3x-5)^3-(2x-3)^3-(x-2)^3} = 65$?

P5. Quali sono le sol. di $x^3-3x = \sqrt{x+2}$?

P6. Quante e quali sono le soluzioni di $|x-1|-|x-2|+|x-4| = 3$?

Visti a lezione. Sostituzioni e riduzioni a prob. simmetrici.

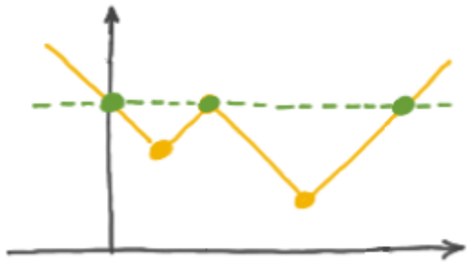
P4. $(a+b)^5-(a^5+b^5) = 5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4 = 5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$

$(a+b)^3-(a^3+b^3) = 3a^2b+3ab^2 = 3ab(a+b)$ e posto che né a, né b, né $a+b$ sia zero, il quoziente vale semplicemente $\frac{5}{3}(a^2+ab+b^2)$.

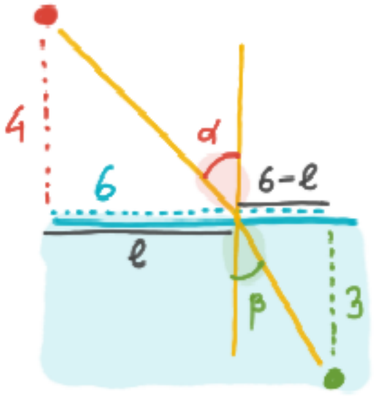
P5. Come nelle risoluzione trigonometrica delle cubiche, una buona idea è porre $x = 2\cos\theta$ per ricondursi a $2\cos(3\theta) = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$. A parte $\theta=0$ associato a $x=2$ abbiamo come soluzioni anche $\theta = 4\pi/7$ e $\theta = 4\pi/5$, che di fatto ci forniscono l'intera fattorizzazione di

$$p(x) = (x^3-3x)^2-(x+2) = x^6-6x^4+9x^2-x-2 = (x-2)(x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+1)$$
$$= (x-2)(x^2+x-1)(x^3+x^2-2x-1).$$

P6. Così come $|x|$, $f(x) = |x-1|-|x-2|+|x-4|$ è una funzione continua e lineare a tratti. I valori di f in corrispondenza di $x \in \{1,2,4\}$ e il fatto che $f(x) \sim |x|$ per $|x| \to +\infty$ fissano l'aspetto dell'intero grafico, e il fatto che le soluzioni siano soltanto $x=0$, $x=2$ e $x=6$.



Snell! Nei mezzi materiali la velocità di propagazione della luce non coincide con quella nel vuoto ($c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s) ma con una sua frazione, ma per il principio d'azione la traiettoria dei fotoni da sorgente a ricevitore è comunque una di quelle di minima durata (non è detto sia unica, cfr. lensing gravitazionale). Questo dà luogo al fenomeno della **rifrazione**. La determinazione della traiettoria nel passaggio tra mezzi diversi separati da un piano è un problema di 4° grado, non risolubile con riga e compasso. Vediamo il classico caso aria ($v \approx c$) – acqua ($v \approx \frac{3}{4}c$).

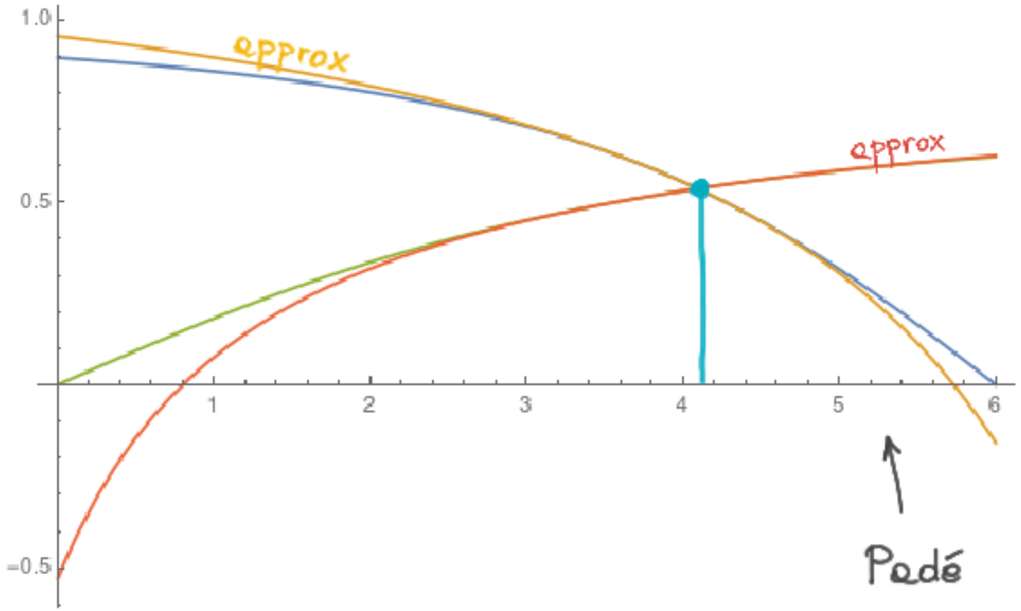


In funzione di ℓ, il tempo di transizione da sorgente a ricevitore è direttamente proporzionale a $\sqrt{\ell^2+4^2} + \frac{4}{3}\sqrt{(6-\ell)^2+3^2} = f(\ell)$. Imporre che si abbia $f'(\ell)=0$ (derivata, principio di Fermat) dà luogo alla legge di Snell $\sin\beta / \sin\alpha = 3/4$, equivalente a

$$\frac{6-\ell}{\sqrt{3^2+(6-\ell)^2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{4^2+\ell^2}} \longrightarrow 16(6-\ell)^2(4^2+\ell^2) = 9\ell^2(3^2+(6-\ell)^2).$$

Dalla situazione fisica abbiamo la certezza che vi sia un'unica soluzione $\ell \in (0,6)$, e questa può essere determinata numericamente attraverso il metodo di Newton (+ ... +) o rimpiazzando le funzioni evidenziate con opportune approssimazioni (omografiche o simili, parabolic o varianti).

Usando approssimazioni omografiche (approssimanti di Padé) centrate in $\ell = 4$ si trova ad esempio



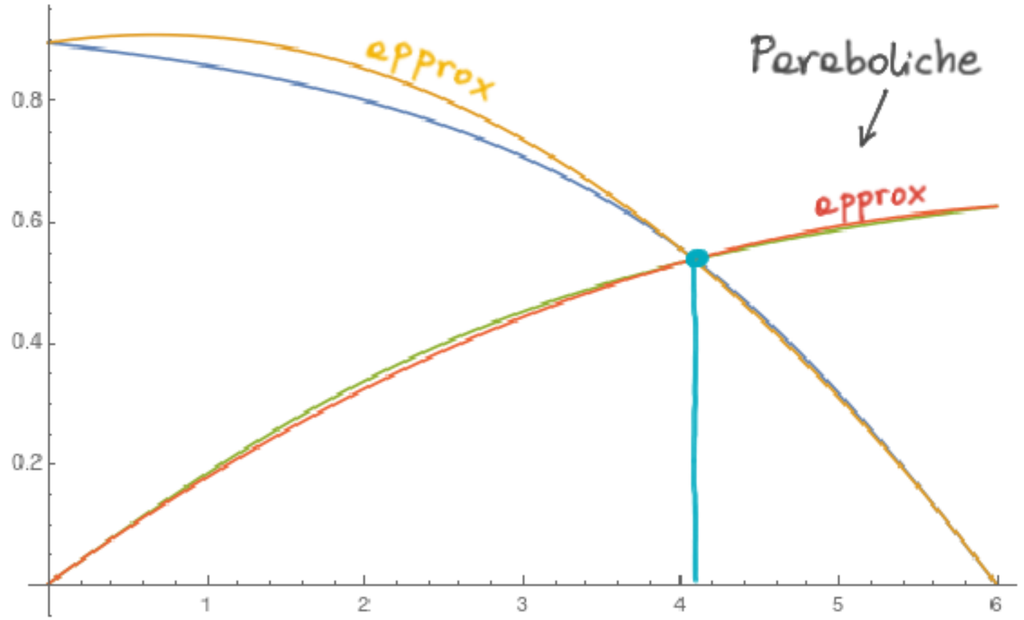
$\ell \approx 4{,}093$ che è già molto accurata. Le approssimazioni paraboliche ottenute interpolando rispetto ai punti $\{0, 4, 6\}$ forniscono invece $\ell \approx 4.084$.

L'equazione polinomiale così risolta numericamente è

$$\ell^4 - 12\ell^3 + 61\ell^2 - \frac{3072}{7}\ell + \frac{216}{7} = 0$$

e il discriminante di $\mathrm{LHS} - (\ell^2 - 6\ell + c)^2$ si annulla in corrispondenza delle sol. di una cubica con un'unica radice reale in ≈ 21.651.

Questo conduce comunque a $\ell \approx 4{,}093$ ma con molta più fatica.



3. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_{2020}$ dei numeri reali, non necessariamente distinti. Supponiamo che gli interi positivi n per cui l'equazione

$$\big|a_1|x-b_1| + a_2|x-b_2| + \cdots + a_{2020}|x-b_{2020}|\big| = n \tag{1}$$

ha *esattamente due* soluzioni reali siano in numero finito.

Dimostrare che gli interi positivi n per cui l'equazione (1) ha *almeno una* soluzione reale sono in numero finito.

Considerazioni: $f(x) = \sum_{k=1}^{2020} a_k |x-b_k|$ è continua e lineare a tratti, e per $x \geq \max b_k$ o $x \leq \min b_k$ ha grafico dato da una semiretta di pendenza $\operatorname{sign}(x) \cdot \sum_{k=1}^{2020} a_k$. In particolare le ipotesi sono soddisfatte solo se $\sum_{k=1}^{2020} a_k = 0$. In tal caso f è costante sia su $x \geq \max b_k$ che su $x \leq \min b_k$, dunque f è una funzione limitata sull'intera retta reale.