2I - Verifica 15/04/24 - Soluzioni

Esercizio 1. (12pt) Si determini quante (non necessariamente *quali*) sono le soluzioni di

$$\left|x-\sqrt{2}\right|+4\left|x-\sqrt{3}\right|+2\left|x-\sqrt{5}\right|=10.$$

Soluzione. Il grafico di $f(x)=\left|x-\sqrt{2}\right|+4\left|x-\sqrt{3}\right|+2\left|x-\sqrt{5}\right|$ è quello di una funzione continua, lineare a tratti e convessa. I punti spigolosi si trovano solo in corrispondenza delle ascisse $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$ e in ognuno di questi punti vale $f(x)\leq 3$. Poiché il grafico di f ha pendenza 7 su $(\sqrt{5},+\infty)$ e pendenza -7 su $(-\infty,\sqrt{2})$ è chiaro che l'equazione assegnata abbia soltanto 2 soluzioni.

Esercizio 2. (13pt) Si determini quali sono le soluzioni di

$$\left|\sqrt{|x-1|}-2\right|=1.$$

Soluzione. L'equazione $|z-2|=1$ ha come soluzioni solo $z=1$ e $z=3$, dunque il problema è equivalente a determinare dove si ha $\sqrt{|x-1|}=1$ oppure $\sqrt{|x-1|}=3$. Questo accade solo laddove $|x-1|\in\{1,9\}$, ossia per le ascisse appartenenti a $\{-8,0,2,10\}$.

Esercizio 3. (15pt) Due numeri reali x,y sono tali per cui $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$ e $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=13$. Quanto vale $x+y$?

Soluzione. Per forza di cose x e y devono essere quantità non negative, per cui non è restrittivo assumere $x=a^2$ e $y=b^2$ con $a,b\geq 0$. In termini di a e b il problema può essere espresso come $a+b=3$ e $a^3+b^3=13$. Poiché

$$13=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)((a+b)^2-3ab)=3(9-4ab)$$

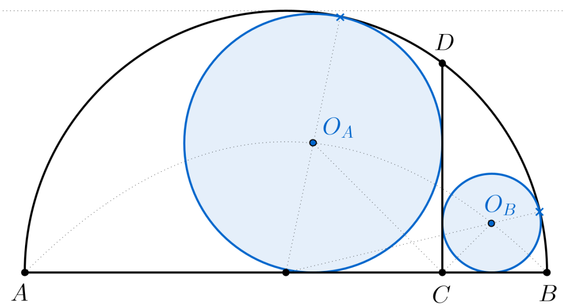
si ha $ab=\frac{14}{9}$, dunque a e b sono le radici del polinomio $z^2-3z+\frac{14}{9}$, vale a dire $\frac{2}{3}$ e $\frac{7}{3}$.
Segue $x+y=a^2+b^2=\frac{53}{9}$, anche direttamente da $a^2+b^2=(a+b)^2-2(ab)$, come osservato da G.Laversa.

Esercizio 4. (17pt) $ABCD$ è un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza Γ di raggio $R=5$. Posto $X=AC\cap BD$, sappiamo che $XA=2,XB=3$ e $XC=6$. Quanto dista X dal centro di Γ?

Soluzione. La lunghezza di XB è in verità irrilevante. Per il Teorema delle corde

$$12=XA\cdot XC=XB\cdot XD=R^2-OX^2=25-OX^2$$

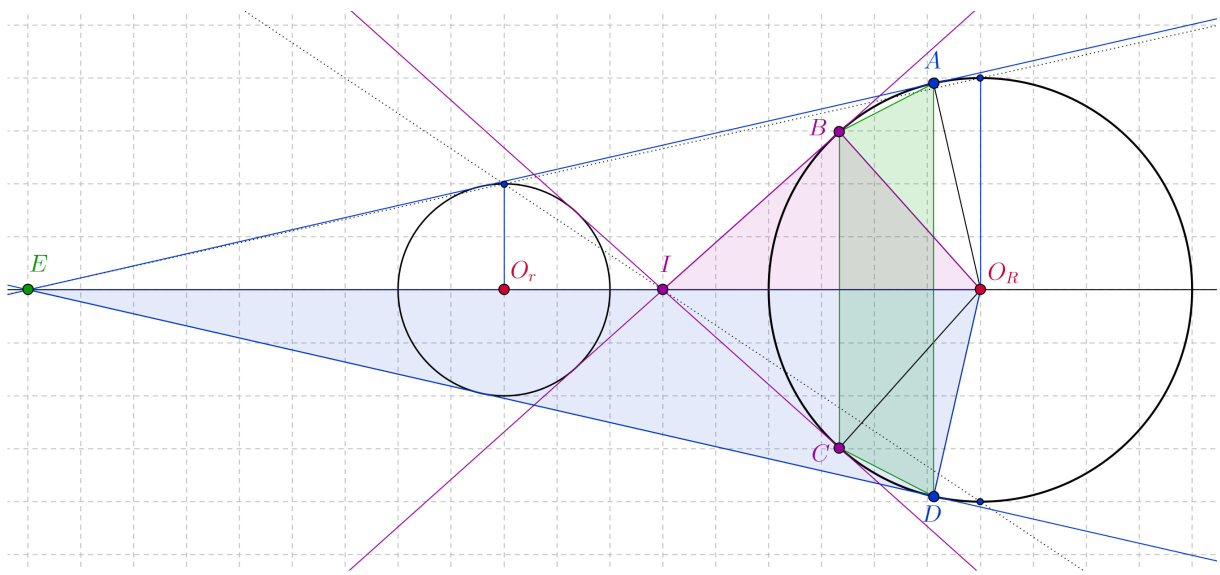
dunque $OX=\sqrt{13}$. Come osservato da A.Bani, è possibile arrivare alla medesima conclusione anche tramite il Teorema di Stewart applicato al triangolo OAC. Poiché gli angoli $\widehat{OXA}$ e $\widehat{OXC}$ sono supplementari la somma dei loro coseni vale zero, dunque $\frac{OX^2+4-25}{4\cdot OX}+\frac{OX^2+36-25}{12\cdot OX}=0$, che si traduce immediatamente in $OX^2=13$.



Esercizio 5. (20pt) Sul diametro AB di un semicerchio è scelto un punto C in modo che si abbia $AC = 8$ e $CB = 2$. Il punto D appartiene alla semicirconferenza e realizza $DC \perp AB$. I cerchi di centri O_A e O_B sono tangenti ad AB, a CD e alla semicirconferenza.
Quanto misurano i loro raggi?
Suggerimenti tratteggiati in figura.

Soluzione. È geometricamente evidente che il diametro della circonferenza più grande debba essere leggermente più piccolo di 5 e il diametro della circonferenza più grande debba essere leggermente più piccolo di 2. Per determinare esattamente questi diametri (o i corrispondenti raggi) è opportuno introdurre un sistema di riferimento centrato in C, avente D sull'asse delle ordinate. Per le condizioni di tangenza agli oppurtuni segmenti, i centri O_B, O_A devono trovarsi rispettivamente sulla retta $y = x$ e sulla retta $y = -x$. Per tangenza al semicerchio vale inoltre che sia O_A che O_B devono essere equidistanti dalla retta $y = 5$ e dal punto $(-3; 0)$ che è centro del semicerchio. L'ultima condizione è equivalente all'appartenenza di O_A ed O_B alla parabola di equazione $y = \frac{1}{10}(2-x)(x+8)$.
Risolvendo $(2-x)(x+8) = \pm 10x$ si ottiene che il raggio della circonferenza più piccola è $4(\sqrt{5}-2) \approx 0.944$ e il raggio della circonferenza più grande è $2(\sqrt{5}-1) \approx 2.472$. In termini equivalenti, il raggio r della circonferenza più piccola deve soddisfare l'equazione irrazionale $\sqrt{(3+r)^2 + r^2} = (5-r)$ e il raggio R della circonferenza più grande deve soddisfare $\sqrt{(3-R)^2 + R^2} = (5-R)$.

Esercizio 6. (22pt) Γ_r e Γ_R sono due circonferenze nel piano aventi raggi $r = 2$ e $R = 4$. I rispettivi centri O_r ed O_R distano 9. 4 rette sono simultaneamente tangenti sia a Γ_r che a Γ_R, e intersecano Γ_R nei vertici $ABCD$ di un quadrilatero convesso. Qual è l'area di $ABCD$?
Suggerimento: le tangenti comuni sono simmetriche rispetto alla retta che contiene i centri (asse).
Le tangenti esterne si intersecano in E, *centro di omotetia esterno*, e quelle interne si intersecano in I, *centro di omotetia interno*. E ed I sono centri di similitudine anche per i diametri di Γ_r e Γ_R ortogonali all'asse. Determinate le posizioni di E ed I il problema è facilmente risolto con poche applicazioni dei Teoremi di Euclide. Un disegno in scala (servendosi dei quadretti presenti sul foglio) può essere di grande ausilio.



Soluzione. Seguendo i suggerimenti del testo, i punti E, I devono trovarsi sull'asse dei centri $O_r O_R$, ma anche sulle opportune congiungenti di estremi dei diametri di Γ_r e Γ_R ortogonali all'asse. Per proporzioni E cade 9 unità a sinistra di O_r mentre I cade 3 unità a destra di O_r. Per evidenti ragioni di simmetria il quadrilatero $ABCD$ è un trapezio isoscele con basi ortogonali all'asse. Inoltre sia $O_R BI$ che $O_R DE$ sono triangoli rettangoli, con coppie di cateti $4, \sqrt{20}$ e $4, \sqrt{308}$. Dai Teoremi di Euclide abbiamo che le altezze relative alle ipotenuse misurano $\frac{4}{3}\sqrt{5}$ e $\frac{4}{9}\sqrt{77}$, mentre le distanze di BC e AD da O_R sono $\frac{8}{3}$ e $\frac{8}{9}$. Combinando le informazioni collezionate

$$[ABCD] = \left(\frac{4}{3}\sqrt{5} + \frac{4}{9}\sqrt{77}\right) \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{8}{9}\right) = \frac{64}{81}(\sqrt{45} + \sqrt{77}) \approx 12.2336.$$