Verifica del 29/04/24 - Soluzioni

Esercizio 1. (14pt) Due punti materiali A e B viaggiano lungo una retta, uno verso l'altro, con velocità che soddisfano $v_A = 3\,m/s$, $v_B = 2\,m/s$. A seguito di un urto perfettamente elastico la velocità di B cambia verso e assume modulo $1\,m/s$. Si determini il rapporto tra la massa di A e quella di B.

Soluzione. Lasciamo implicite le unità di misura, che supponiamo essere sempre quelle standard per le grandezze coinvolte. Dette x e y le masse di A e di B, e detta w la velocità di A subito dopo l'urto, nell'opportuno sistema di riferimento la conservazione della quantità di moto e dell'energia meccanica del sistema $A \cup B$ è descritta dalle equazioni

$$3x - 2y = wx + y, \qquad 9x + 4y = w^2 x + y$$

equivalenti a

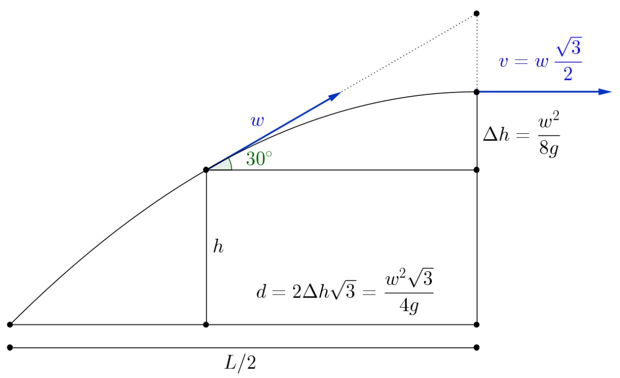
$$3x - 3y = wx, \qquad 9x + 3y = w^2 x.$$

Dall'identità $(3x - 3y)^2 = x(9x + 3y)$ segue che il rapporto $\rho = \frac{x}{y}$ cercato soddisfa

$$3(\rho - 1)^2 = \rho(3\rho + 1) \quad \iff \quad 7\rho = 3$$

dunque vale $\frac{3}{7}$. A posteriori si può osservare che con $x = 3$ e $y = 7$ si verificano
$p = 3x - 2y = -5$ e $2E = 9x + 4y = 55$, con $w = -4$.

Esercizio 2. (17pt) Un giavellotto viene filmato mentre si trova a $15\,m$ dal suolo ed ha una velocità di $25\,m/s$ che forma un angolo di $30°$ rispetto al suolo. Supponendo assenza di attriti, qual è la gittata del lancio di tale giavellotto? *Facoltativo*: con quale velocità ed angolo è stato lanciato il giavellotto?

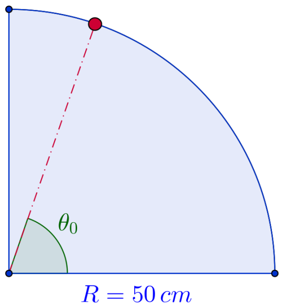


Soluzione. Il quesito è presto risolto coordinando ad arte considerazioni energetiche e considerazioni geometriche. Indichiamo con w la velocità che il giavellotto ha quando viene filmato, ed altre quantità caratteristiche come in figura. In virtù dell'angolo di $30°$ e delle caratteristiche del moto parabolico, quando il giavellotto transita dall'apice della traiettoria lo fa con velocità $v = w\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Per bilancio energetico tra la situazione iniziale e quella in cui il giavellotto si trova nell'apice della traiettoria, $\Delta h = \frac{w^2}{8g}$. Per la struttura delle tangenti ad una parabola, $\frac{d}{2\Delta h} = \sqrt{3}$, dunque $d = 2\Delta h\sqrt{3} = \frac{w^2\sqrt{3}}{4g}$. Detta L la gittata del giavellotto, l'apertura della parabola stabilisce l'uguaglianza $\frac{\Delta h}{d^2} = \frac{h+\Delta h}{(L/2)^2}$. Quest'ultima è a sua volta equivalente a

$$L = 2d\sqrt{1 + \frac{h}{\Delta h}} = \frac{w}{2g}\sqrt{3w^2 + 24gh} = 93.7565\,m.$$

Parte facoltativa: per bilancio energetico tra l'istante filmato e l'istante di lancio del giavellotto, la velocità di lancio è stata $\sqrt{w^2 + 2gh} = 30.315\,m/s = 109.134\,Km/h$. Per geometria delle tangenti, l'angolo di lancio è stato $\arctan\left(\frac{2(h+\Delta h)}{L/2}\right) \approx \arctan(0.98) \approx 44°25'$.



Esercizio 3. (20pt) Un punto materiale di massa $m = 100g$ è collocato al di sopra di un supporto che ha la forma di un quarto di cerchio di raggio $R = 50\,cm$, in corrispondenza dell'angolo acuto θ_0, come indicato in figura.
In assenza di attriti, si dimostri che indipendentemente dall'angolo iniziale, durante il moto di scivolamento del punto materiale questo ad un certo punto si distacca dal supporto. Si determini infine la relazione che sussiste tra l'altezza iniziale e quella a cui avviene il distacco dal supporto.

Soluzione. Utilizziamo, come ragionevole, un sistema di riferimento polare dove la posizione iniziale corrisponde a $\theta = \theta_0$ e il suolo corrisponde a $\theta = 0$. Il punto materiale si distacca dal supporto quando l'accelerazione centrifuga che agisce su di esso supera il modulo della componente del peso ortogonale alla traiettoria, ossia appena dopo che $\frac{v^2}{R}$ uguaglia $g \sin\theta$, ossia appena dopo che v^2 uguaglia $gR\sin\theta$.

D'altra parte, finché c'è aderenza tra punto materiale e supporto, il legame tra posizione e velocità è mutuato dalla conservazione dell'energia meccanica, per cui $2gR\sin\theta_0 = 2gR\sin\theta + v^2$. In particolare la quota $R\sin\theta$ del punto materiale diminuisce mentre la velocità v aumenta, finché non si ha $2gR\sin\theta_0 = 2gR\sin\theta + gR\sin\theta = 3gR\sin\theta$, che stabilisce il distacco dal supporto e il proseguimento della traiettoria secondo un moto parabolico e non più circolare. In particolare il distacco dal supporto avviene quando la quota del punto materiale è esattamente $\frac{2}{3}$ di quella iniziale. Come prevedibile da considerazioni dimensionali, sia la massa del punto materiale che il raggio del supporto che l'intensità dell'accelerazione gravitazionale sono in verità irrilevanti.