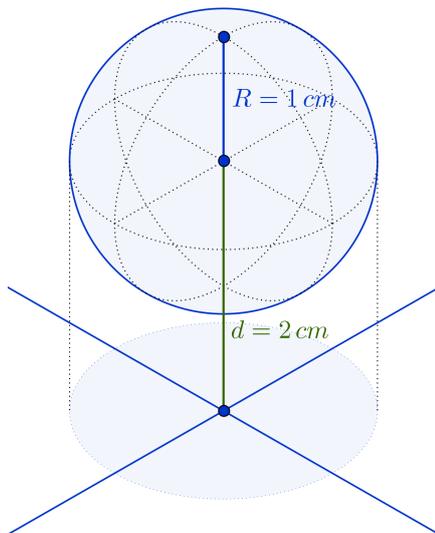


4I - Verifica del 24/04/24 - Soluzioni



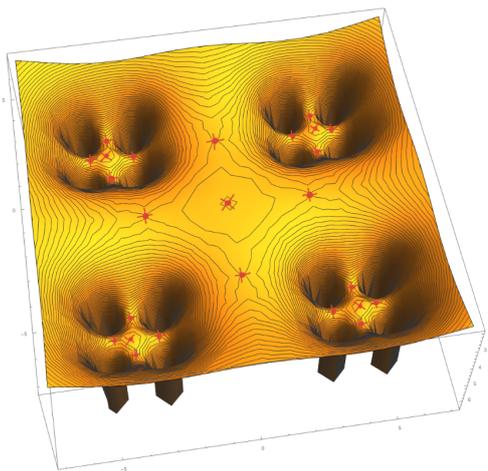
Esercizio 1. (16pt) All'interno di una sfera conduttrice di raggio $R = 1 \text{ cm}$ è presente una carica complessiva di -1 mC . La sfera ha massa 1 g e per effetto della repulsione elettrica levita al di sopra di un piano uniformemente carico, mantenendo il suo centro a 2 cm di distanza dal piano. Supponendo $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$ si determini la densità superficiale di carica del piano.

Soluzione. Poiché la sfera è conduttrice le cariche depositate al suo interno si distribuiscono uniformemente sulla superficie, dando luogo ad un campo che all'esterno della sfera è indistinguibile da quello di una singola carica puntiforme. Sempre per il Teorema di Gauss il campo generato dal piano uniformemente carico è costante ed ha intensità $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 2\pi\sigma k$.

Detta Q la carica depositata sulla sfera ed M la sua massa,

la condizione di equilibrio del sistema è dunque $2\pi\sigma kQ = Mg$, da cui $\sigma = \frac{Mg}{2\pi kQ}$. A conti fatti la densità superficiale di carica del piano risulta $\sigma \approx -1.733 \cdot 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$. Osserviamo che R e d sono sostanzialmente irrilevanti, posto che si abbia $d > R$.

Esercizio 2 (La carica dei 101, 16pt). In punti distinti del piano sono disposte 101 cariche inamovibili da $+1 \mu\text{C}$. Consideriamo i punti di equilibrio del campo elettrico generato da queste cariche, ossia i punti per cui $\vec{E} = 0$. Il numero di questi punti di equilibrio dipende dalla configurazione geometrica delle cariche oppure no? Si forniscano esempi nel caso in cui si sostenga il *sì*, una dimostrazione nel caso in cui si sostenga il *no*.



Soluzione. Se si dispongono $n \geq 3$ cariche identiche nei vertici di un n -agono regolare si ottengono per simmetria $(n+1)$ punti di equilibrio, uno al centro e i rimanenti in prossimità dei punti medi dei lati. È tuttavia evidente che cambiando disposizione delle cariche il numero di punti di equilibrio possa diventare assai più grande. A lato è ad esempio raffigurato il grafico del potenziale per una distribuzione di $n = 16$ cariche in un "quadrato di quadrati" (*tensor trick*), che dà luogo a ben 25 punti di equilibrio, dei quali 5 di massimo e 20 di sella. La risposta corretta è in particolare quella [affermativa](#).

Notiamo tuttavia che la *parità* del numero di punti di equilibrio non dipende dalla configurazione. Infatti per caratteristica di Eulero o elementi di teoria di Morse il grafico del potenziale (eventualmente cambiato di segno) deve soddisfare la relazione $\#\text{selle} - \#\text{massimi} = \#\text{cariche} - 1$, dunque un sistema di 101 cariche identiche ha certamente un numero **pari** di punti di equilibrio, ma a seconda della configurazione questo può variare da un minimo di 100 ad un massimo di circa 400.

Esercizio 3. (16pt) Un atomo di idrogeno è schematizzabile come un punto materiale carico negativamente (elettrone) in orbita circolare attorno ad un punto materiale carico positivamente (protone).

Sapendo che $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ e

- la velocità media dell'elettrone è $\frac{c}{137}$, dove $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ è la velocità della luce nel vuoto;
- in valore assoluto un protone ed un elettrone hanno la stessa carica, $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- le masse di elettrone e protone sono rispettivamente $9.11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$, $1.67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$;

si stimi il diametro di un atomo di idrogeno.

Soluzione. Per la configurazione che stiamo studiando l'influsso dell'attrazione gravitazionale è assolutamente trascurabile, pertanto la stabilità dell'orbita circolare è dettata dal bilanciamento tra forza centrifuga e attrazione elettrica. Detto R il raggio dell'orbita deve dunque aversi

$$\frac{m_e \left(\frac{c}{137}\right)^2}{R} = \frac{kq_e^2}{R^2} \iff R = \frac{137^2 kq_e^2}{m_e c^2}$$

e a conti fatti il *raggio di Bohr* risulta di poco superiore a mezzo Ångstrom, $R \approx 5.27 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.
