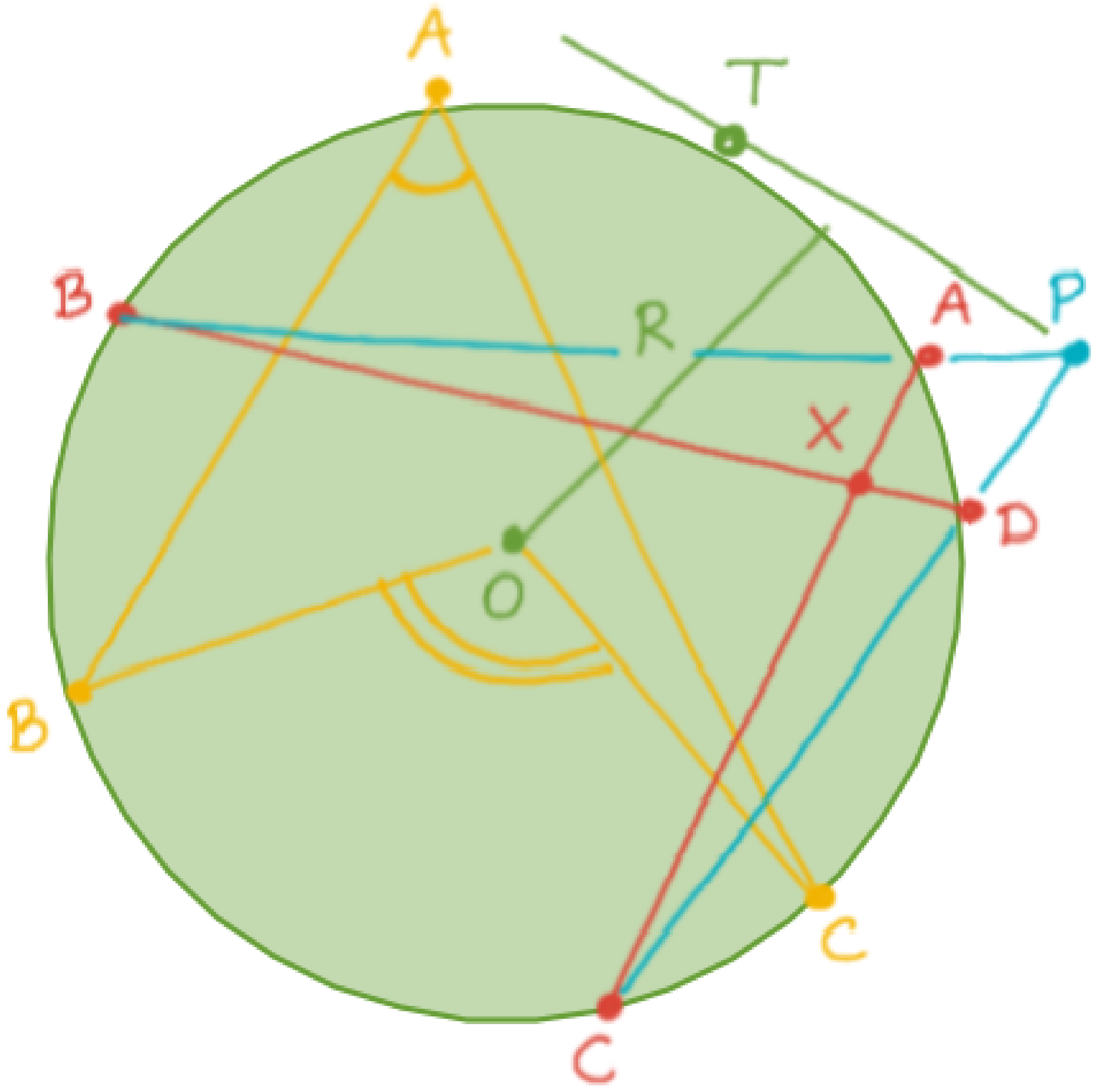
# Mat 2I.6

faccende quadratiche e non solo

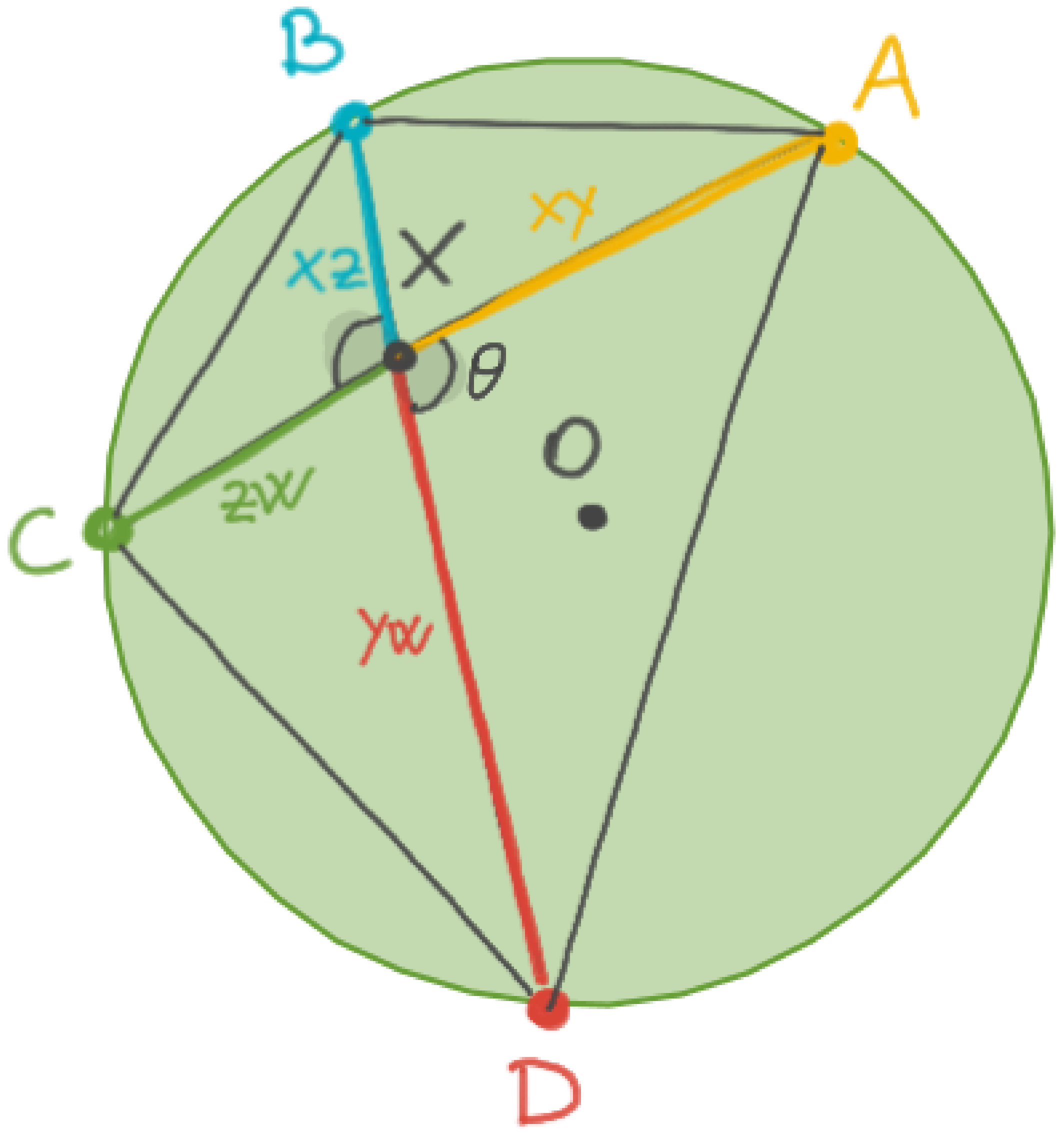
- sistemi di equazioni o disequazioni
- equazioni e disequazioni "irrazionali"
- geometria ed algebra della circonferenza
- geometria ed algebra della parabola
- risultati di Archimede
- approfondimenti

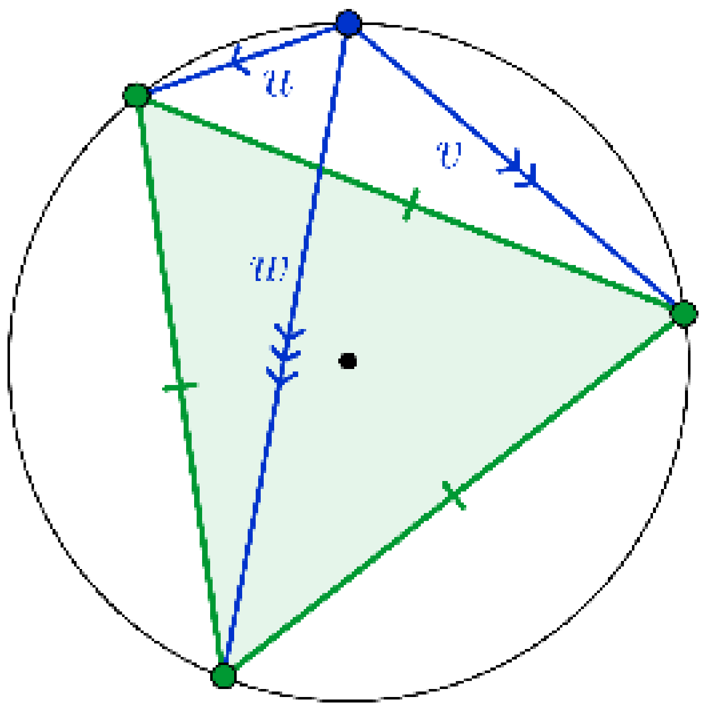



- ✓ Proprietà dell'in- e del circo-centro
- ✓ $4R\Delta = abc$, $2\Delta = r(a+b+c)$
- ✓ Configurazioni di più circonferenze, centri di omotetia
- ✗ Inversione circolare e applicazioni

## Cose da sapere/saper fare

- ✓ Da O, R all'equazione e viceversa
- ✓ Determinare tangenti
- ✓ Corrispondenze tra angoli
- ✓ Condizioni di in- e circo-scrivibilità
- ✓ Teorema delle corde $XA \cdot XC = XB \cdot XD$
- ✓ Teorema della secante-tangente-potenza
  $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PT^2 = PO^2 - R^2$
- ✓ Disuguaglianza di Tolomeo
  $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$ con uguaglianza sse ABCD ciclico
- ✓ Formula di Brahmagupta
  $[ABCD] = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$
- ✓ Relazioni tra a, b, c, d ed R
- ✓ Isoperimetrica: ABCD di area massima $\rightarrow$ ABCD ciclico




## Corde + Coseno → Tolomeo (uguaglianza)

Il fatto che ABCD sia ciclico è equivalente al fatto che i segmenti XA, XB, XC, XD abbiano le lunghezze indicate. In queste ipotesi

$$AC \cdot BD = (xy + zw)(xz + yw) = x^2yz + xy^2w + xz^2w + yzw^2$$

mentre per similitudine e Teorema del coseno

$$BC \cdot AD = zy\,(x^2 + w^2 - 2xw\cos\theta),$$

$$AB \cdot CD = xw\,(y^2 + z^2 + 2yz\cos\theta),$$

dunque $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ è equivalente a

$$(xy + zw)(xz + yw) = zy\,(x^2 + w^2) + xw\,(y^2 + z^2).$$

✓

**Corollario:** nella configurazione rappresentata accanto

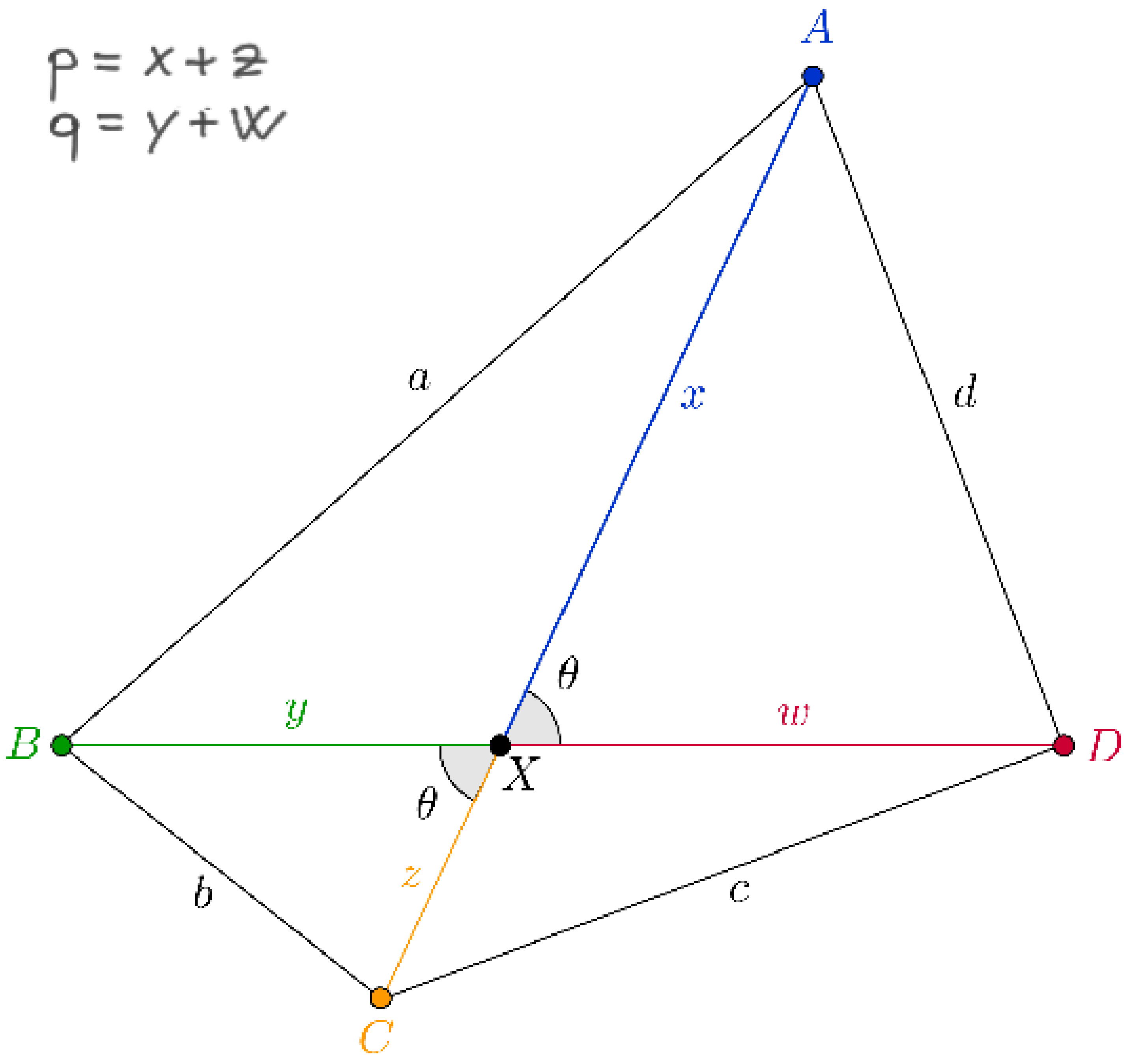
$$u + v = w$$

**Nota:** per ABCD generico, $AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

**Formula di Coolidge (Harvard ~1930):** l'area $\Delta$ di un quadrilatero nel piano dipende unicamente dalle lunghezze $a, b, c, d$ dei lati e dalle lunghezze $p, q$ delle diagonali:

$$16\Delta^2 = (2pq)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$$

$p = x + z$
$q = y + w$




**Dimostrazione:** con riferimento alla figura

$$16\Delta^2 = (4\Delta)^2 = (2pq\sin\theta)^2 = (2pq)^2 - (2pq\cos\theta)^2$$

dove $2pq = 2xy + 2yz + 2zw + 2wx$ e

$$\left.\begin{aligned} 2xy\cos\theta &= -x^2 - y^2 + a^2 \\ 2yz\cos\theta &= y^2 + z^2 - b^2 \\ 2zw\cos\theta &= -z^2 - w^2 + c^2 \\ 2wx\cos\theta &= w^2 + x^2 - d^2 \end{aligned}\right\} \text{Per il Teorema del coseno}$$

dunque $(2pq\cos\theta)^2 = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$. $\square$

**Corollari:** Brahmagupta, Bretschneider, isoperimetrica.

**Isoperimetrica:** se l'ordine e le lunghezze dei lati di un quadrilatero convesso sono fissati, l'area massima è realizzata solo quando il quadrilatero è ciclico.

**Dimostrazione:** per la formula di Coolidge e la disuguaglianza di Tolomeo

$$16\Delta^2 = (2pq)^2 - (a^2-b^2+c^2-d^2)^2 \leqslant (2ac+2bd)^2 - (a^2-b^2+c^2-d^2)^2$$

con uguaglianza realizzata solo quando il quadrilatero è ciclico. $\square$

**Corollario: Brahmagupta.** Per il quadrilatero ciclico si ha

$$\Delta^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$ con $s$ semiperimetro.

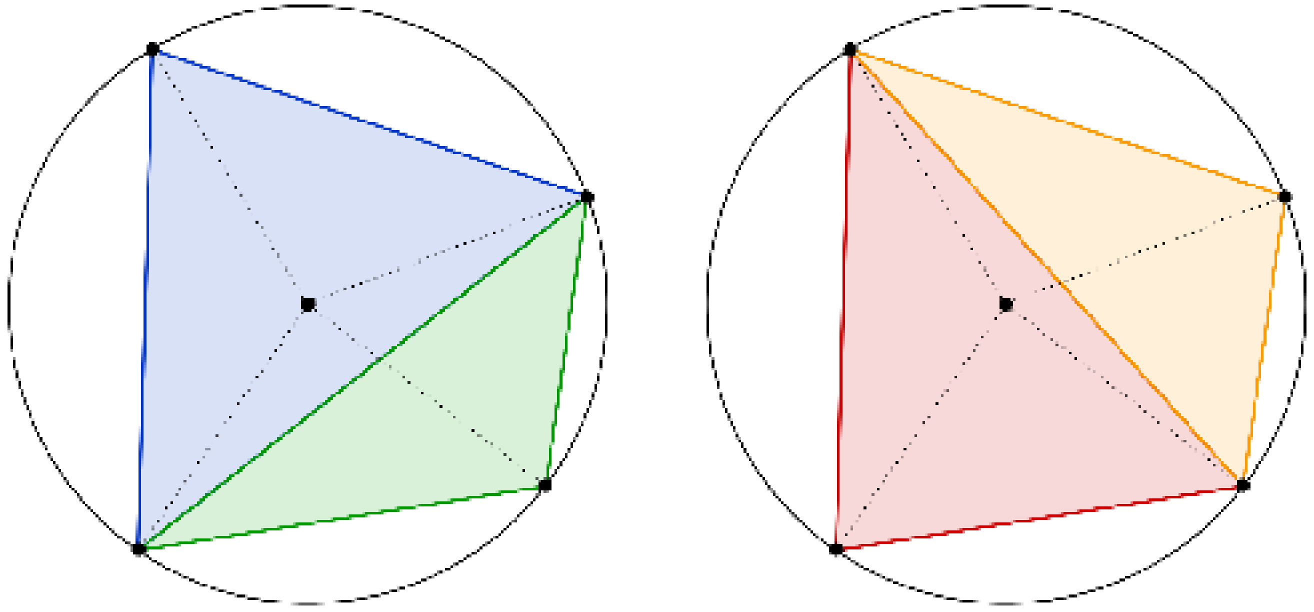
(628dC)

**Nota:** con $d=0$ ritroviamo Erone / Archimede.

**Generalizzazione: Bretshneider (1842).** Per un qualsiasi quadrilatero convesso

$$\Delta^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).$$

**Problema di Parameshvara[1422] / Lhuilier[1782]**: date le lunghezze dei lati di un quadrilatero ciclico, come possiamo ricostruire da queste le lunghezze delle diagonali e il raggio della circonferenza circoscritta?



Per il legame tra $a, b, c, R, \Delta$ in un triangolo si ha

$$4\Delta = abq/R + cdq/R$$
$$= bcp/R + dap/R$$

dunque $p/q = (ab+cd)/(bc+ad)$,

talora noto come "secondo Teorema di Tolomeo".

Da $pq = ac+bd$ seguono immediatamente
$$p^2 = (ac+bd)(ab+cd)/(bc+ad)$$
$$q^2 = (ac+bd)(bc+ad)/(ab+cd).$$

Il circoraggio $R$ può essere a questo punto dedotto da Brahmagupta via

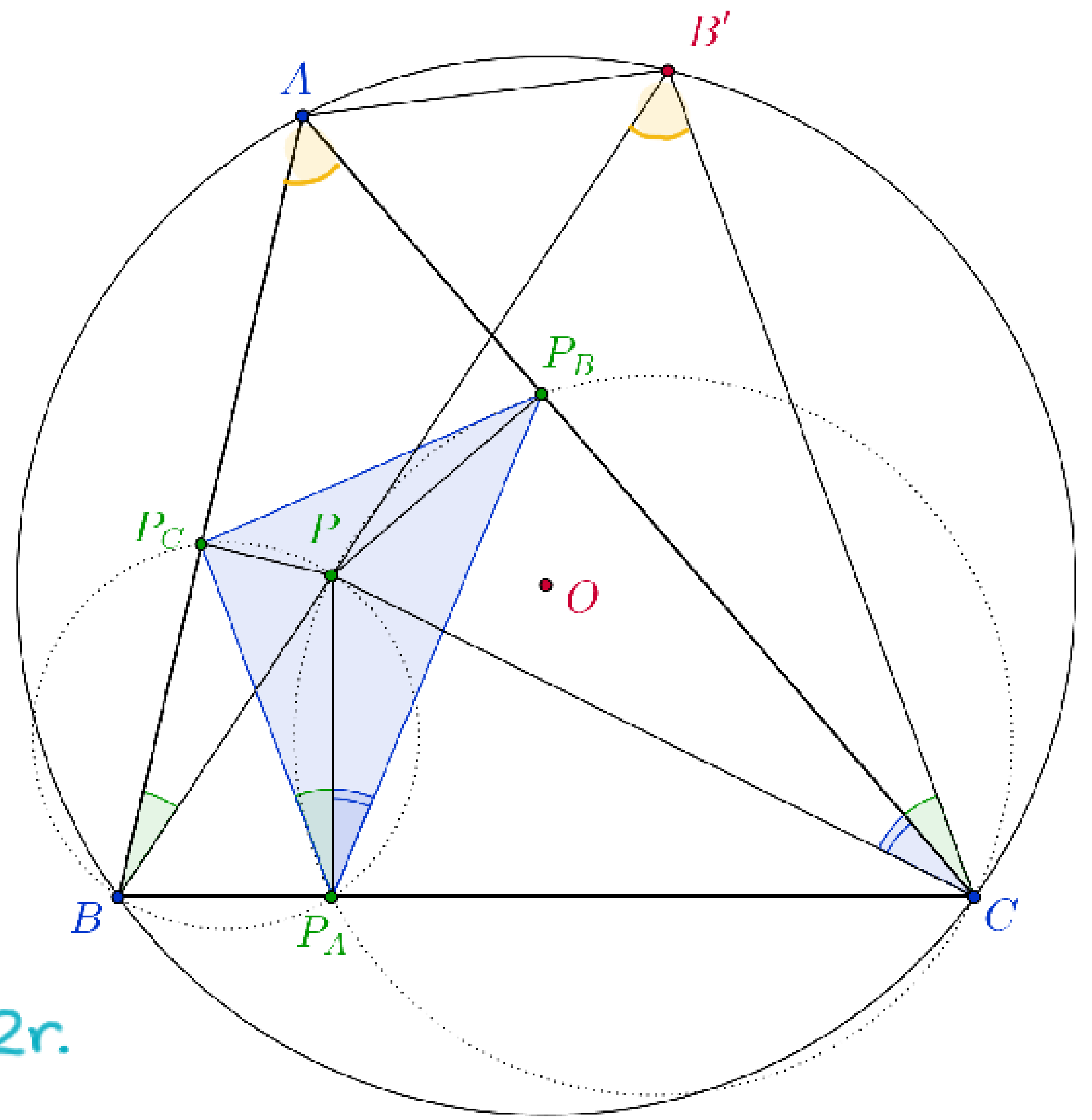
$$16\Delta^2 R^2 = 16\cdot(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)R^2 = (ab+cd)^2 q^2 = (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc).$$
$$16\cdot R^2 = (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)/((s-a)(s-b)(s-c)(s-d)).$$

# Teorema di Eulero per il triangolo pedale

In forma inversa $OP^2 = R^2\left(1 - 4\frac{[P_AP_BP_C]}{[ABC]}\right)$

Dato un triangolo $ABC$ e un punto $P$ interno, il triangolo pedale di $P$ è quello avente per vertici le proiezioni $P_A, P_B, P_C$ di $P$ sui lati di $ABC$. Fatto: l'area del triangolo pedale dipende unicamente dalla distanza di $P$ dal circocentro $O$ di $ABC$, via

$$[P_AP_BP_C]/[ABC] = \frac{1}{4}\left(1 - OP^2/R^2\right).$$




Dimostrazione. Posto $B' = BP \cap \Gamma_{ABC}$, per angle chasing si ha $\widehat{P_BP_AP_C} = \widehat{PCB'}$. Per il Teorema del seno $P_AP_C = PB\sin B$, $P_BP_A = PC\sin C$ e $PC/\sin A = PB'/\sin\widehat{PCB'}$. Segue

$$[P_AP_BP_C] = \frac{1}{2} P_AP_C \cdot P_AP_B \cdot \sin\widehat{P_BP_AP_C} = \frac{1}{2} PB \cdot PB' \cdot \sin A \sin B \sin C.$$

D'altra parte $\sin A \sin B \sin C = abc/(8R^3) = \frac{1}{2}[ABC]/R^2$

e per il Teorema delle corde $PB \cdot PB' = R^2 - OP^2$.

Corollario (Eulero) $OI^2 = R^2 - 2Rr \geq 0$, da cui $R \geq 2r$.

Corollario (Simson) $P_A, P_B, P_C$ allineati $\longleftrightarrow P \in \Gamma_{ABC}$.

**Teorema di Carnot (the real one)** In un triangolo acutangolo la somma delle distanze del circocentro O dai lati coincide con la somma tra R ed r:

$$R(\cos A + \cos B + \cos C) = R + r.$$

**Lemmata.** 1) Le proiezioni di H sui lati staccano sul perimetro pezzi per cui

$$a\cos B + a\cos C + b\cos A + b\cos C + c\cos A + c\cos B = a+b+c$$

2) Congiungendo O ai vertici si ha che $\Delta = \frac{R^2}{2}(\sin(2A) + \sin(2B) + \sin(2C))$

3) $r(a+b+c) = 2\Delta$ 4) $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ 5) $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R$

**Dimostrazione:** l'enunciato è equivalente a

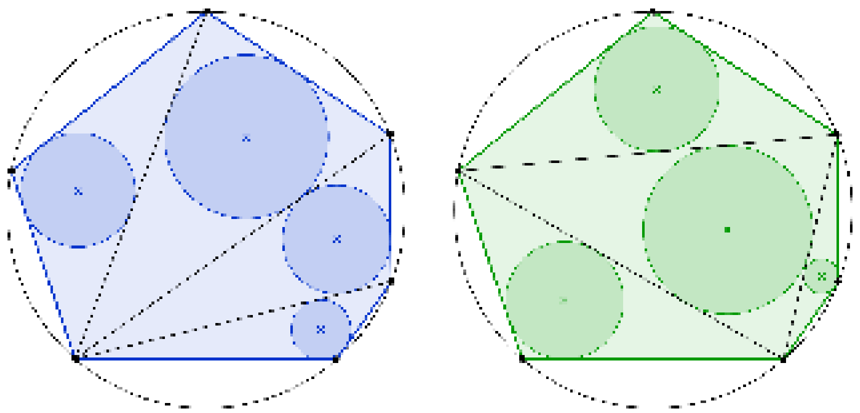
$$(a+b+c)(\cos A + \cos B + \cos C) = (a+b+c) + (a+b+c)\frac{r}{R}$$

$$\overset{1,3}{\longleftrightarrow} \quad a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2\Delta / R$$

$$\overset{5,4}{\longleftrightarrow} \quad R(\sin(2A) + \sin(2B) + \sin(2C)) = 2\Delta / R$$

che è equivalente a 2.

**Corollario: Teorema giapponese** [Sangaku periodo Edo] Per qualsiasi triangolazione di un quadrilatero ciclico la somma degli inraggi è la stessa.



**Porisma di Poncelet** (caso triangolare) Se $ABC$ ha circonferenza circoscritta $\Gamma_R$ e circonferenza inscritta $\Gamma_r$, a partire da qualunque $\tilde{A} \in \Gamma_R$ le tangenti da $\tilde{A}$ a $\Gamma_r$ intercettano $\Gamma_R$ in $\tilde{B}, \tilde{C}$ tali per cui $\tilde{B}\tilde{C}$ risulta tangente a $\Gamma_r$.

È equivalente al risultato di Eulero per cui $OI^2 = R(R-2r)$.

## Poncelet → Eulero

Considerando quanto accade nel triangolo isoscele verde, da Pitagora abbiamo, posto $d = OI$,

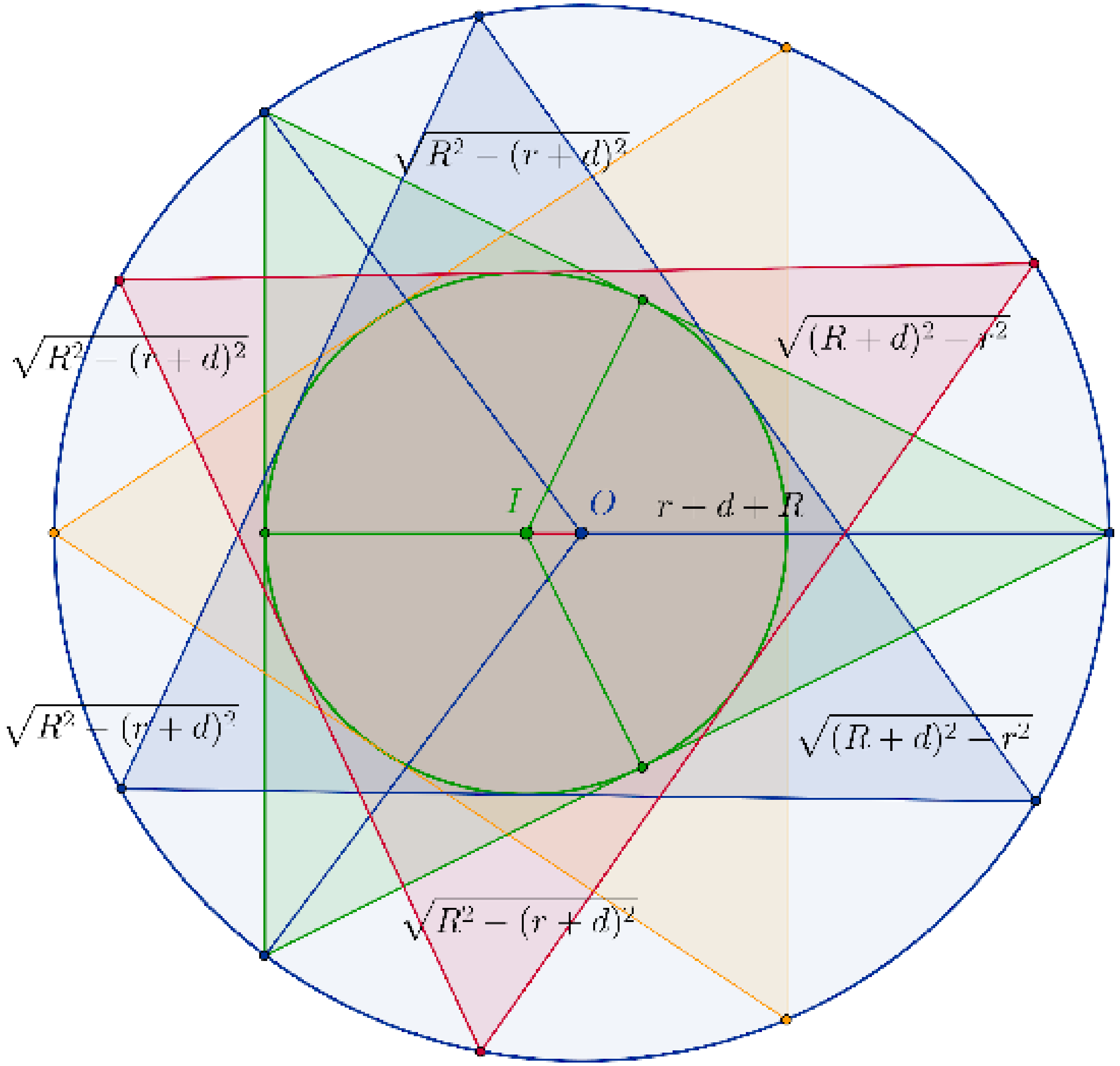
$$\left(\sqrt{R^2-(r+d)^2} + \sqrt{(R+d)^2-r^2}\right)^2 = R^2-(r+d)^2+(R+r+d)^2,$$

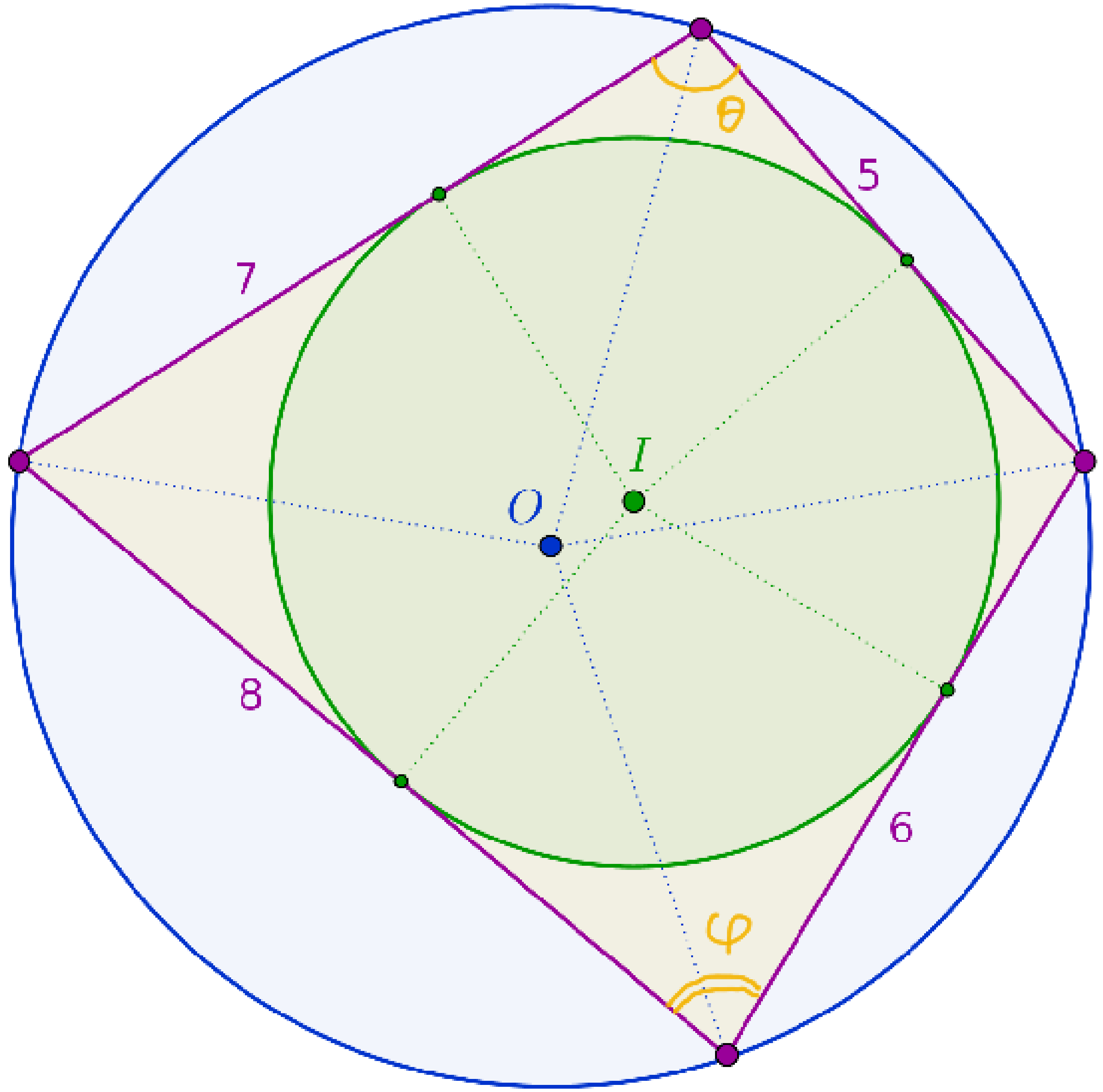
$$\left(\sqrt{R-r-d} + \sqrt{R-r+d}\right)^2 = (R-r-d)+(R+r+d),$$

$$2R-2r+2\sqrt{(R-r)^2-d^2} = 2R,$$

$$\sqrt{(R-r)^2-d^2} = r, \qquad (R-r)^2-d^2 = r^2,$$

$$d^2 = (R-r)^2-r^2 = R(R-2r).$$






In alternativa, dal Teorema del coseno
$$5^2+7^2-2\cdot 5\cdot 7\cos\varphi = 8^2+6^2-2\cdot 8\cdot 6\cos\theta$$
comporta $48\cos\theta - 35\cos\varphi = 13$
e nel caso ciclico $\cos\varphi = -\cos\theta$, da cui
$\cos\theta = 13/83$ e $\sin\theta = \sqrt{1-(13/83)^2}$.

# Esercizio del 10/04/24

I lati di un quadrilatero misurano nell'ordine 5, 7, 8, 6. Se l'area del quadrilatero è massima, quanto valgono $R$ ed $r$?

**Soluzione.** Per isoperimetrica il quadrilatero è ciclico. Inoltre $5+8=6+7$ assicura che il quadrilatero sia anche circoscritto (bicentrico). Per Brahmagupta l'area è data da $\sqrt{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 4\sqrt{105}$ e per qualunque poligono circoscritto $r=\Delta/s$, dunque $r=\frac{4}{13}\sqrt{105}$. $R$ può essere ricavato dalla formula di Lhuilier

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

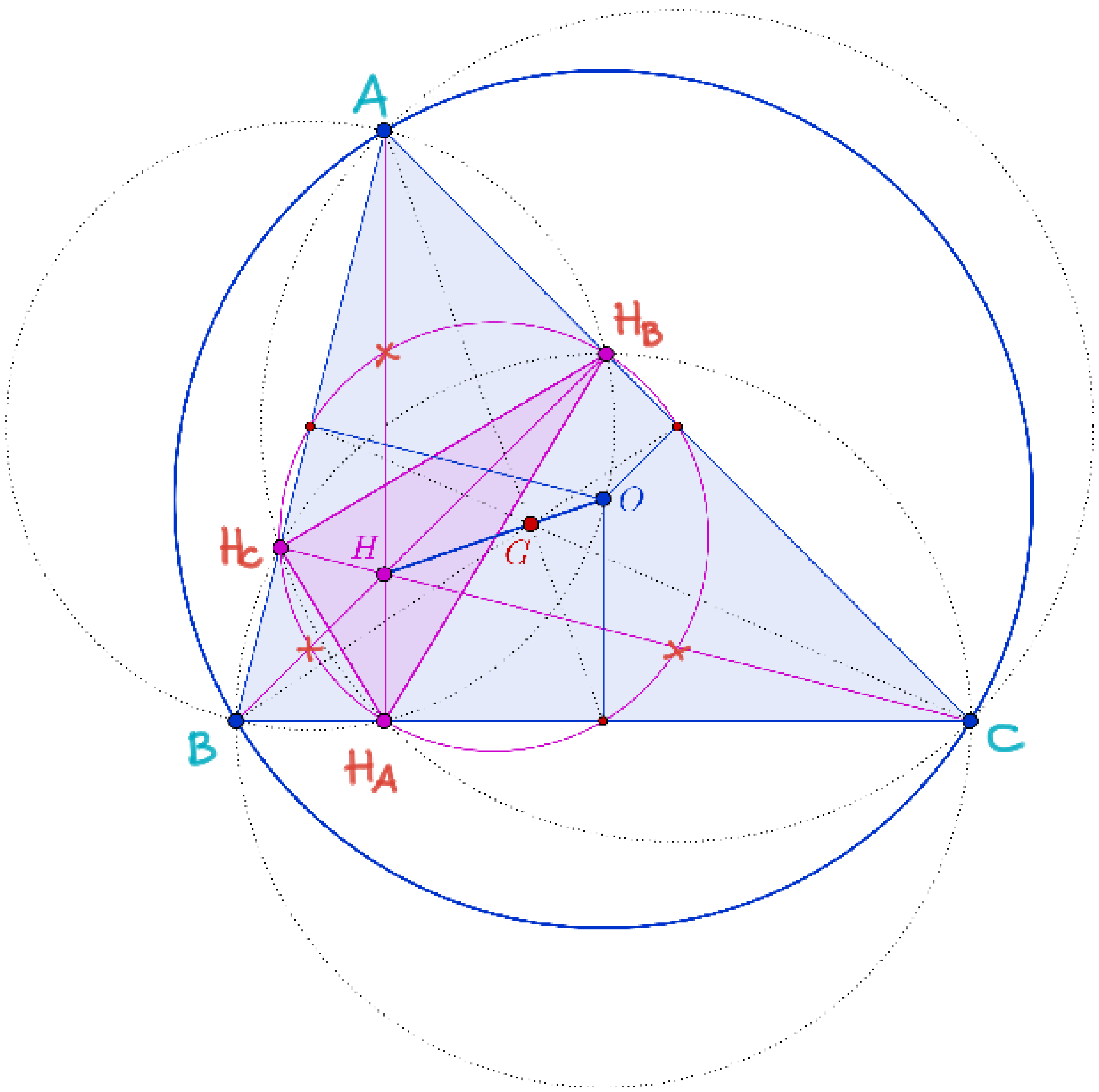
# Altro esercizio del 10/04/24:

In un generico triangolo $ABC$, quanto vale $OG$ in termini di $a, b, c, R$?

Idee: 1) per l'allineamento di $O, G, H$ $\quad OG = \frac{1}{3} OH$

2) per Eulero $OH$ è ricostruibile dall'area del triangolo pedale di $H$, ossia dall'area del triangolo ortico.

3) $BH_C H_B C$ è ciclico, $AH_B H_C$ è simile ad $ABC$.
I lati del triangolo ortico misurano $a\cos A$, $b\cos B$, $c\cos C$ e il circoraggio del triangolo ortico è $R/2$ per esistenza della circonferenza dei nove punti.




Segue
$$\begin{aligned} OH^2/R^2 &= 1 - 4\,[H_A H_B H_C]/[ABC] \\ &= 1 - 8\cos A\cos B\cos C \\ &= 3 + 2\cos(2A) + 2\cos(2B) + 2\cos(2C) \\ &= 9 - 4\left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right) \end{aligned}$$

da cui $OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$ e $OG^2 = R^2 - (a^2+b^2+c^2)/9$.

# Alternative: Huygens-Steiner
(parallel axis theorem)

Per completamento dei quadrati si ha che le curve di livello di $PA^2+PB^2+PC^2$ sono circonferenze centrate in $(A+B+C)/3 = G$, e in particolare

$$PA^2+PB^2+PC^2 = GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2$$
$$= \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+3PG^2.$$

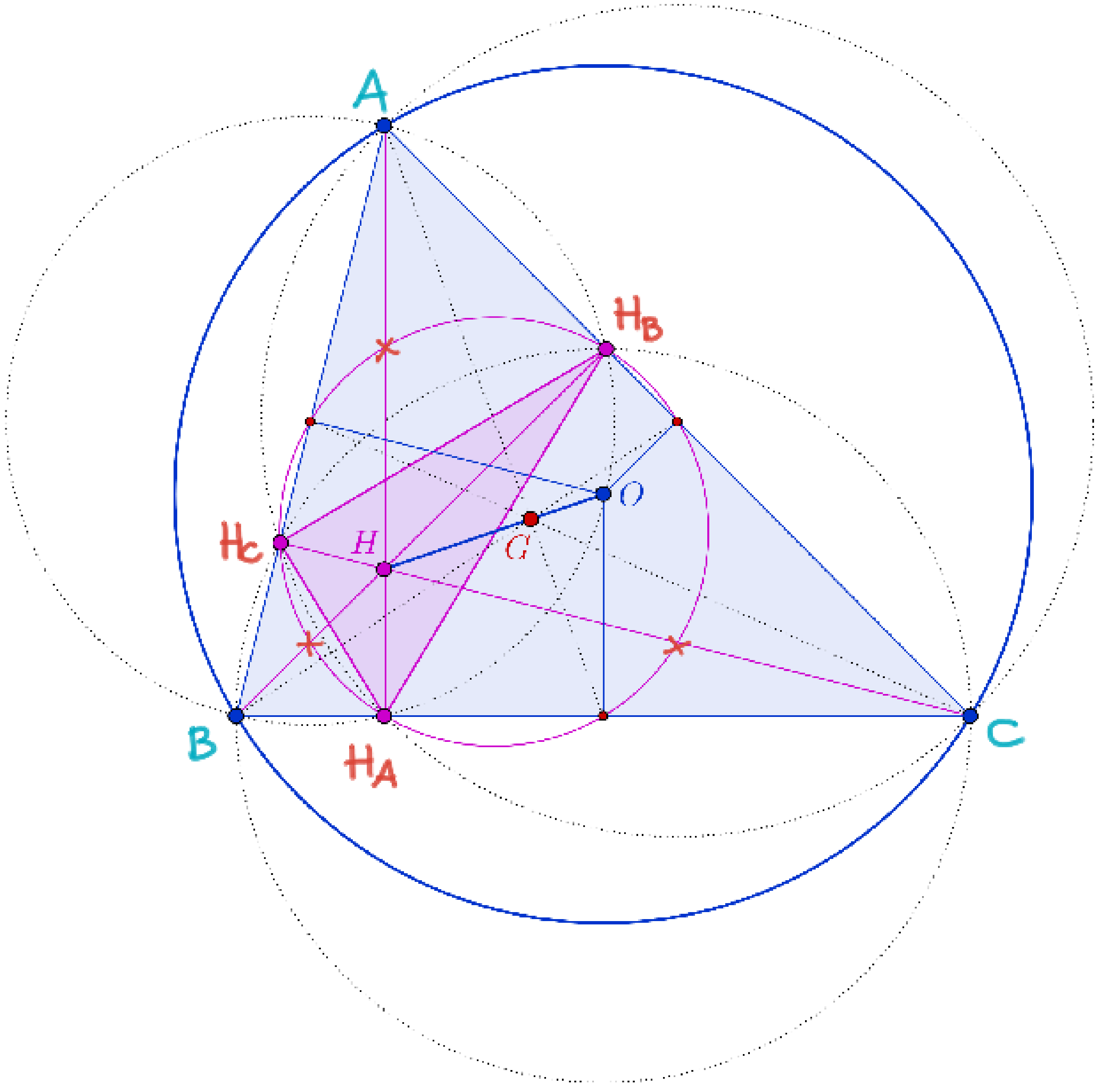
Applicando il risultato a $P=O$ si ottiene

$$3R^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+3OG^2$$

da cui, immediatamente,

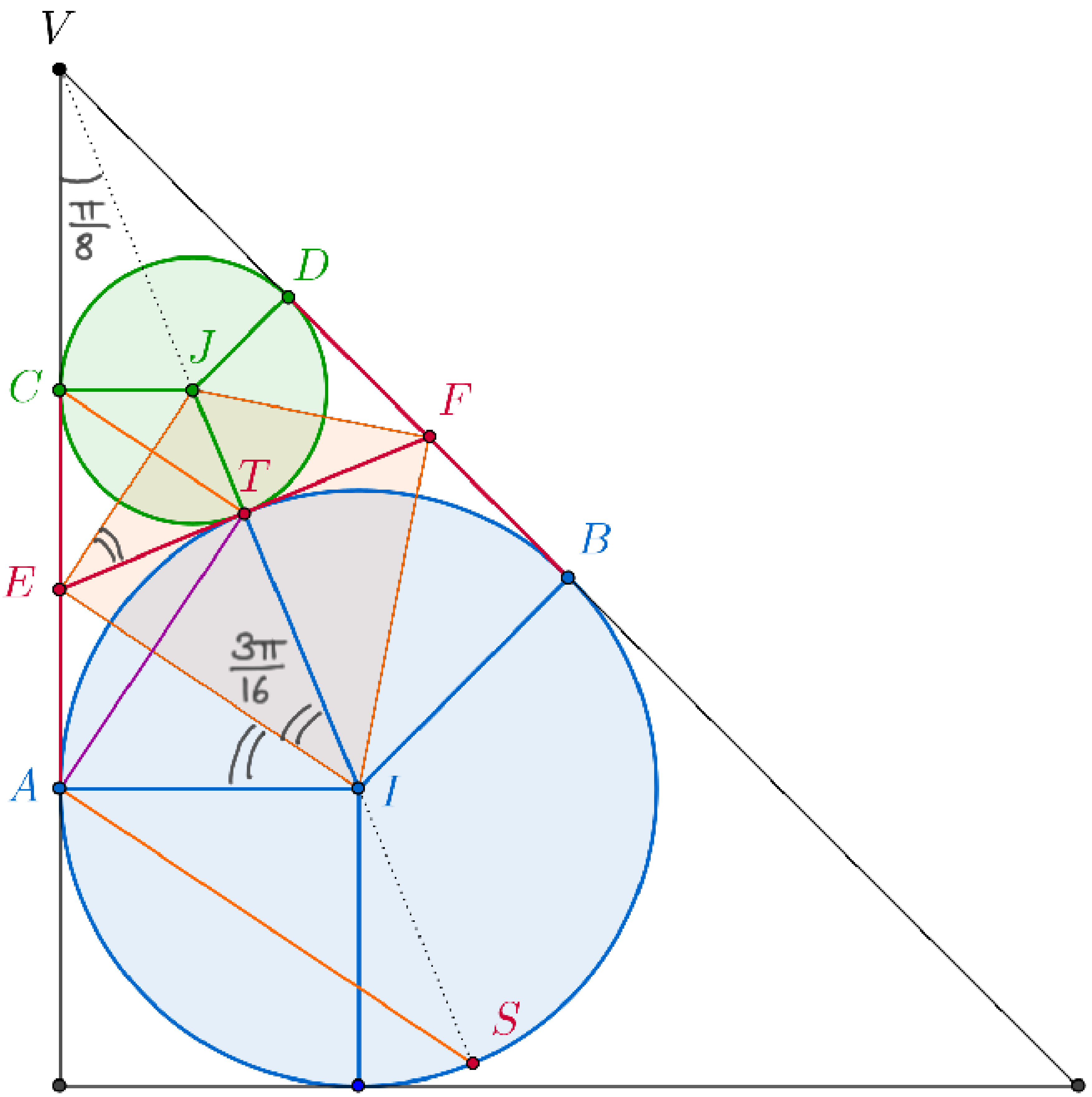
$$OG^2 = R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2),$$

$$OH^2 = 9R^2-(a^2+b^2+c^2).$$




Idee in sintesi:

l'area del triangolo pedale fissa la distanza da O
e $PA^2+PB^2+PC^2$ fissa la distanza da G



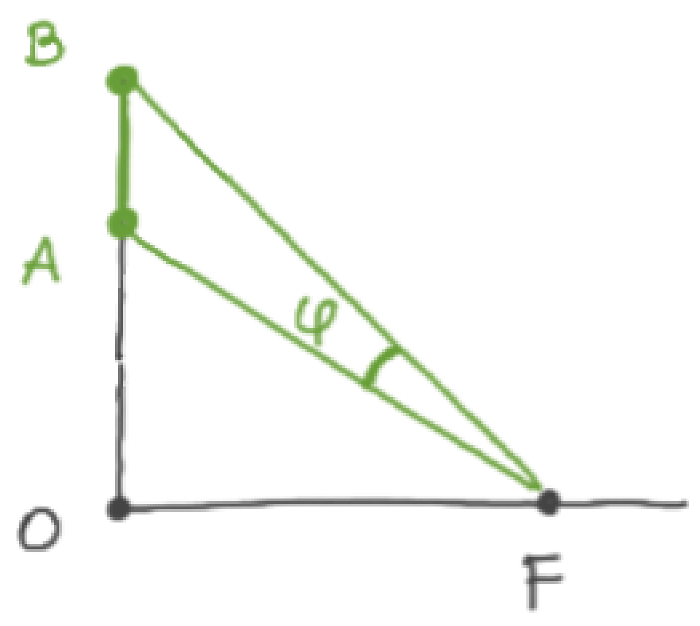

# Configurazione studiata nella lezione del 12/4/24

due circonferenze tangenti tra loro e tangenti ai lati di un angolo

## Fatti interessanti:

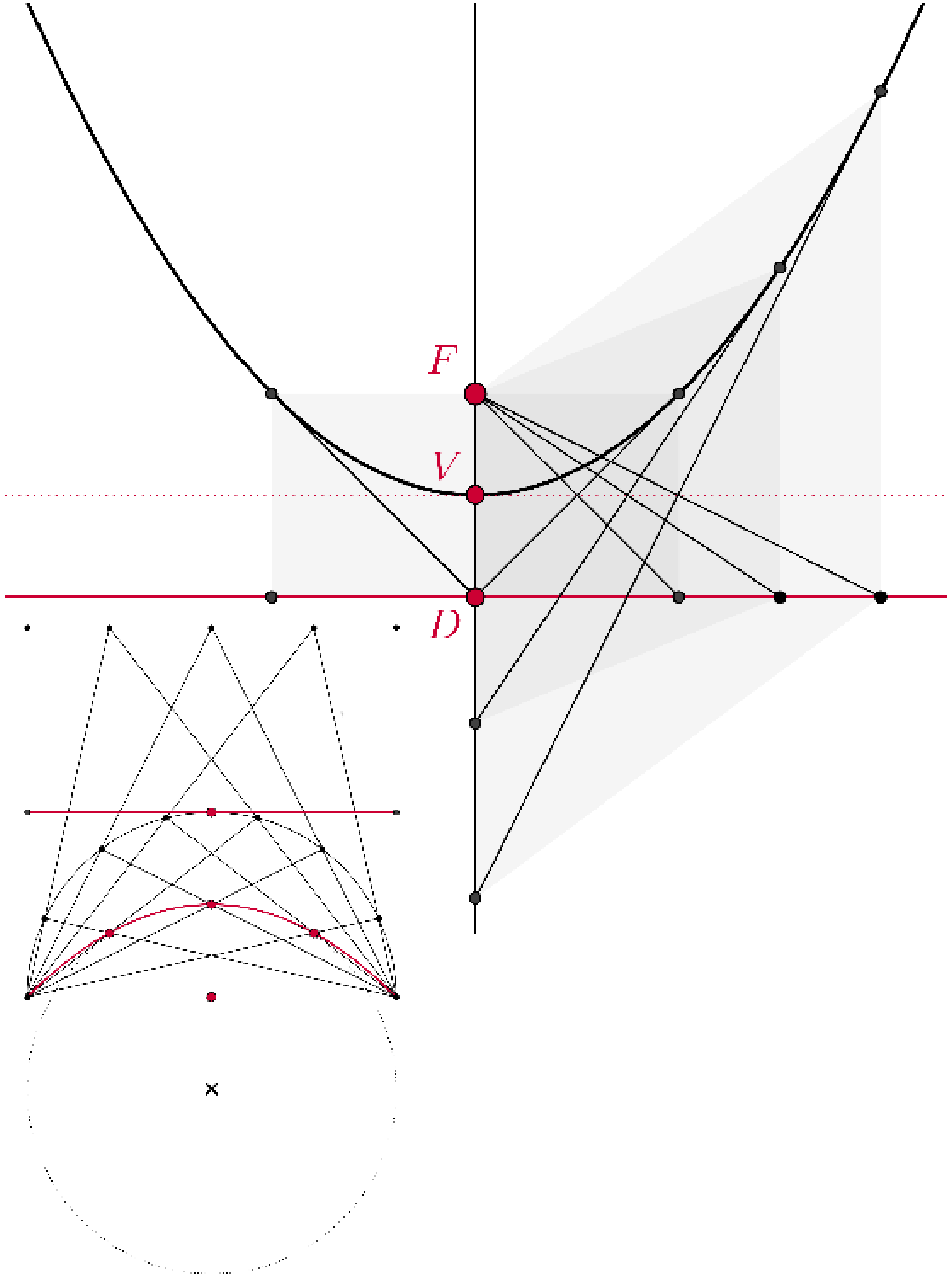
- tutte le circonferenze tangenti ai lati dell'angolo con vertice in V sono tra loro omotetiche ed hanno centro lungo la bisettrice
- per le proprietà delle tangenti condotte da un punto esterno, $EA = ET = EC = FB = FT = FD$
- per angle chasing i quadrilateri IFJE, ITEA, ETJC sono deltoidi ciclici e simili tra loro
- se $AI = TI = 1$, allora $ET = \tan(3\pi/16)$ e $TJ = CJ = \tan^2(3\pi/16)$.

**Grande classico: problema di Regiomontano.** Una formica si trova sul pavimento del Louvre e fissa un quadro sulla parete che ha di fronte. Il quadro è alto 1 m ed ha il bordo inferiore collocato a 2 m da terra. A che distanza dalla parete deve collocarsi la formica, se vuole rendere massima l'ampiezza dell'angolo occupato dal quadro nel suo campo visivo?



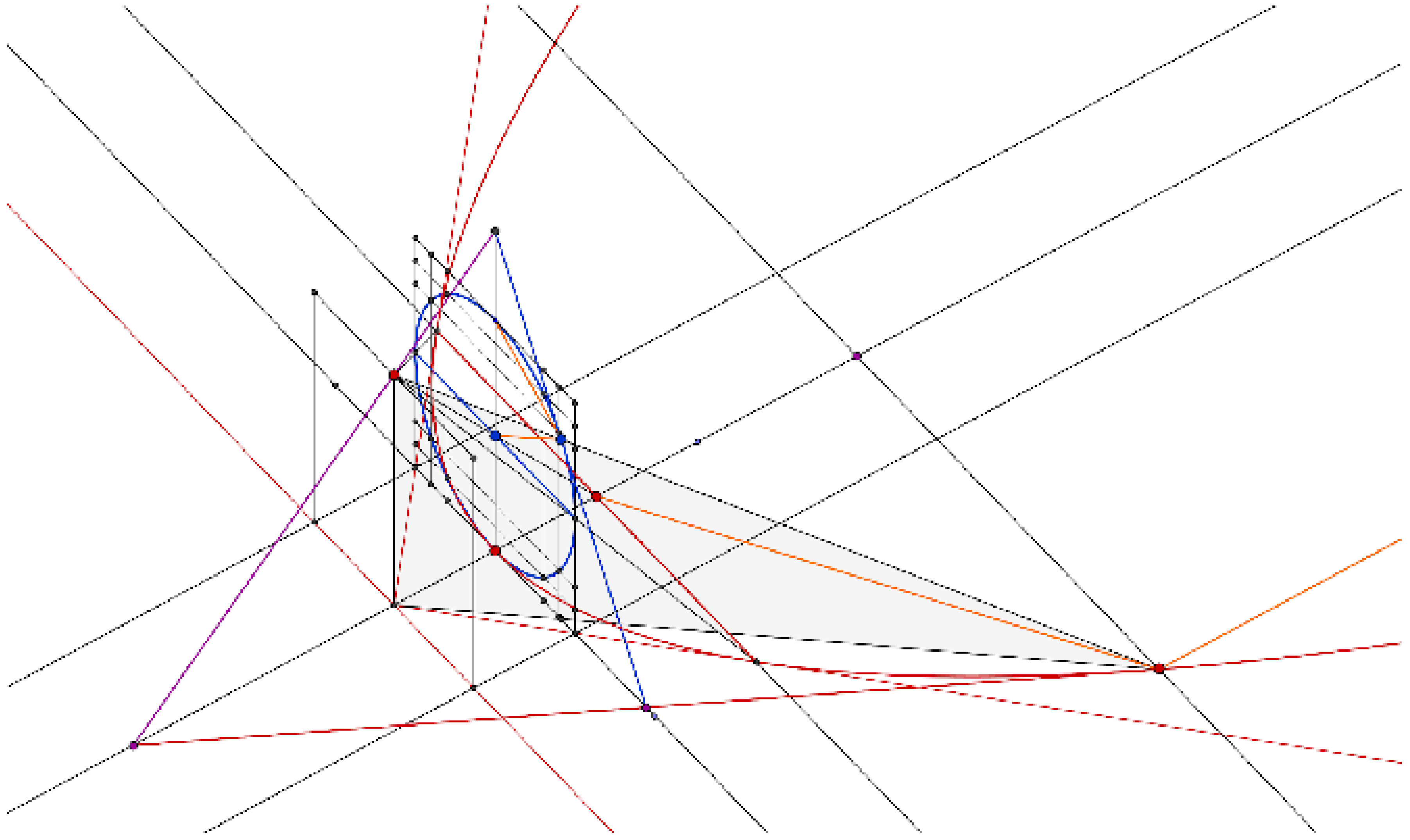

**Beatyful trick.** Il luogo dei punti P del piano per cui $\widehat{BPA} = \widehat{BFA}$ è l'unione di due archi di circonferenza simmetrici rispetto ad AB. Per massimizzare $\widehat{BFA}$ è dunque necessario che la circonferenza per A, B, F sia tangente al suolo. Dal Teorema delle secanti segue che la collocazione ottimale di F è quella per cui $OF^2 = OA \cdot OB$, da cui

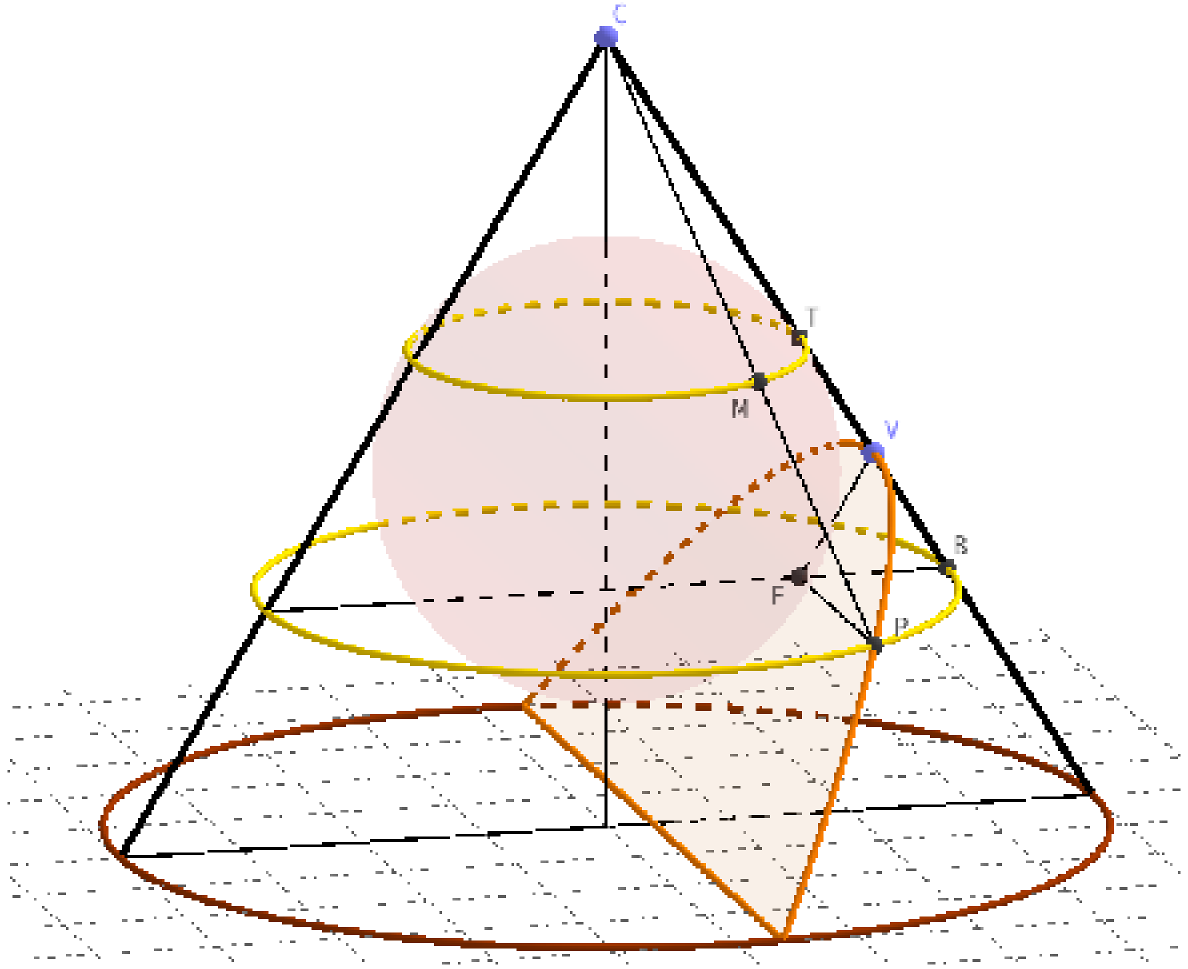
$OF = \sqrt{6}\,\text{m} \approx 2.45\,\text{m}$.




# Cose da sapere/saper fare

- Da F, V all'equazione e viceversa
- Determinare tangenti (algebricamente e non solo)
- Interpolazione / estrapolazione
- Proprietà ottica e conseguenze
- Area del segmento parabolico e conseguenze (Archimede, Simpson)
- Metodo di esaustione (Eudosso, Archimede)
- Volume e superficie di parti di sfera (Archimede)
- Somme di quadrati (o altre potenze) consecutivi





Circonferenza e parabola sono collegate da proiettività.

Dandelin :

$PF = PR = ST = DZ$

$= PQ$