2I - Verifica 27/05/24 - Soluzioni

Esercizio 1. (12pt) Angela lancia per 25 volte una coppia di dadi (equi, indipendenti e privi di memoria, con l'usuale struttura cubica e le facce numerate da 1 a 6). È più probabile che nello storico delle estrazioni sia presente almeno un doppio 6, o che non lo sia?

Soluzione. Nello storico *non è* presente un doppio 6 con probabilità $\left(1-\frac{1}{36}\right)^{25} \approx 49.447\,\% < \frac{1}{2}$.
In particolare è più probabile che nello storico vi sia un doppio 6.

Esercizio 2. $(10+4\text{pt})$ Un concorso pubblico consiste in una prova scritta, valutata con un punteggio intero da 1 a 60, e una prova orale valutata con un punteggio intero da 1 a 40. Il concorso è superato se complessivamente si collezionano almeno 70 punti. Federica ha appena sostenuto entrambe le prove, con una commissione così folle da attribuire valutazioni *a caso* sia nella prova scritta che in quella orale, rispetto a distribuzioni uniformi. Con queste informazioni, qual è la probabilità che Federica non abbia superato il concorso? Sapendo invece che Federica ha totalizzato 56 punti nella prova scritta, qual è la probabilità che non abbia superato il concorso?

Soluzione. Riguardo il primo punto possiamo compilare (o anche solo *immaginare* di compilare) una tabella con 40 righe e 60 colonne, e colorare le caselle in cui la somma tra gli indici di riga e colonna è minore di 70. I casi favorevoli (per noi, sfavorevoli per Federica) risultano così 1904 su un totale di 2400, corrispondenti ad una probabilità di bocciatura di $\frac{119}{150} \approx 79.33\,\%$. Nel secondo caso è invece chiaro che Federica viene bocciata se e solo se ottiene un punteggio nella prova orale minore di 14, cosa che accade con probabilità $\frac{13}{40} = 32.5\,\%$.

Esercizio 3. $(7+8\text{pt})$ Le 64 caselle di una scacchiera sono etichettate con i numeri interi da 1 a 64. In un'urna sono presenti 64 palline, anch'esse numerate da 1 a 64. Roberta pesca dall'urna due palline.
Qual è la probabilità che le caselle corrispondenti alle palline estratte abbiano un lato in comune?
Qual è la probabilità che le caselle corrispondenti alle palline estratte abbiano solo un vertice in comune?

Soluzione. Le coppie di caselle sulla scacchiera sono $\binom{64}{2} = 32 \cdot 63$. Le coppie di caselle adiacenti orizzontalmente sono $8 \cdot 7$, e altrettante sono le coppie di caselle adiacenti verticalmente. Le coppie di caselle adiacenti diagonalmente (in direzione SE-NO oppure SO-NE) sono invece $2\cdot 7\cdot 7$. Segue che la prima probabilità richiesta è $\frac{2\cdot 7\cdot 8}{32\cdot 63} = \frac{1}{18} \approx 5.56\,\%$ mentre la seconda probabilità richiesta è $\frac{2\cdot 7\cdot 7}{32\cdot 63} = \frac{7}{144} \approx 4.86\,\%$.

Esercizio 4. (16pt) Un mazzo di carte francesi (da poker) viene mescolato e le prime 13 carte vengono servite a Pietro. Qual è la probabilità che la *mano* di Pietro contenga due semi ognuno rappresentato da 3 carte, un seme rappresentato da 5 carte e un seme rappresentato da 2 carte?

Soluzione. Una *mano* favorevole può essere costruita attraverso il seguente algoritmo:

- Scegliamo il seme rappresentato da 5 carte (4 possibilità)
- Scegliamo il seme rappresentato da 2 carte (3 possibilità).
  A questo punto i semi da 3 carte sono fissati.

- Scegliamo 5 carte per il seme più rappresentato ($\binom{13}{5}$ modi), 2 carte per quello meno rappresentato ($\binom{13}{2}$ modi) e 3 carte per ognuno dei rimanenti semi ($\binom{13}{3}^2$ modi).

Segue che i casi favorevoli sono $12\binom{13}{5}\binom{13}{2}\binom{13}{3}^2$ mentre i casi possibili sono $\binom{52}{13}$.
La probabilità cercata è in particolare $\approx 15.52\,\%$.

Esercizio 5. (20pt) In un'urna sono presenti 5 palline gialle, 5 palline rosse, 3 palline verdi e 2 palline blu. Se Elisa estrae simultaneamente 4 palline dall'urna, qual è la probabilità che le estratte presentino 3 dei 4 colori possibili?

Soluzione. Le estrazioni possibili sono $\binom{15}{4} = 1365$. Le estrazioni monocromatiche sono soltanto $5+5 = 10$; le estrazioni che presentano tutti e 4 i colori sono soltanto $5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 150$. Le estrazioni di tipo GR sono $\binom{10}{4} - 10 = 200$; quelle di tipo GV o RV sono $\binom{8}{4} - 5 = 65$; quelle di tipo GB o RB sono $\binom{7}{4} - 5 = 30$ e quelle di tipo VB sono $\binom{5}{4} = 5$. Per passaggio al complementare abbiamo che le estrazioni favorevoli sono

$$1365 - (10 + 150 + 200 + 130 + 60 + 5) = 810$$

dunque la probabilità cercata è $\frac{810}{1365} = \frac{54}{91} \approx 59.34\,\%$.

Esercizio 6. (22pt) Nonostante sia matematicamente e fisicamente impossibile, Antonio è riuscito a programmare una procedura RNG che, quando invocata, restituisce un numero reale nell'intervallo $[0, 1]$ con distribuzione di probabilità perfettamente uniforme. Il nostro scopo è sfruttare il lavoro di Antonio per selezionare un punto random di un cerchio di raggio 1, rispetto ad una distribuzione di probabilità uniforme. Dimostrate che ciò è possibile con 2 sole chiamate di RNG.

Soluzione. Un tentativo ragionevole è quello di utilizzare l'output a della prima chiamata di RNG per fissare l'argomento $\theta = 2\pi a$ e l'output b della seconda chiamata di RNG per fissare il modulo $\rho = b$ in coordinate polari. Quest'approccio naif tuttavia *non funziona*: considerato un qualunque raggio $r \in (0, 1)$ e il cerchio di raggio r concentrico con quello del problema, la probabilità di selezionare un punto interno al cerchio di raggio r risulta r, mentre per uniformità dovrebbe essere r^2. Possiamo allora modificare l'idea naif nel seguente modo:

- prendiamo $2\pi a$ come argomento θ
- prendiamo $\sqrt{b}$ come modulo ρ

avendo così che $(\rho\cos\theta; \rho\sin\theta)$ è davvero un punto uniformemente a caso nel cerchio unitario.
Un'ultima finezza consiste nell'osservare che basta *una* chiamata di RNG: i bit di posto pari/dispari dell'output ci forniscono infatti due distribuzioni uniformi e indipendenti. Ciò dovrebbe bastare a convincervi dell'impossibilità matematico/fisica di un RNG uniforme su $[0, 1]$, che dovrebbe fornire il doppio dell'informazione che fornisce, ossia 0, o infinita.

Sono state accettate come parzialmente corrette anche soluzioni che potenzialmente richiedono molte chiamate di RNG, come generare un punto uniformemente a caso del quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$ e scartarlo nel caso in cui si abbia $x^2 + y^2 > 1$, in analogia con la procedura di bilanciamento di un dado iniquo.