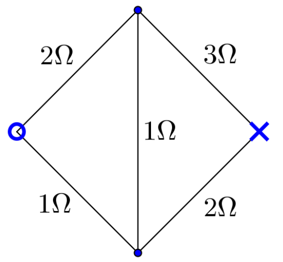
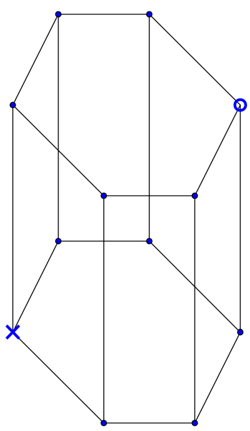
4I - Verifica del 29/05/24 - Soluzioni



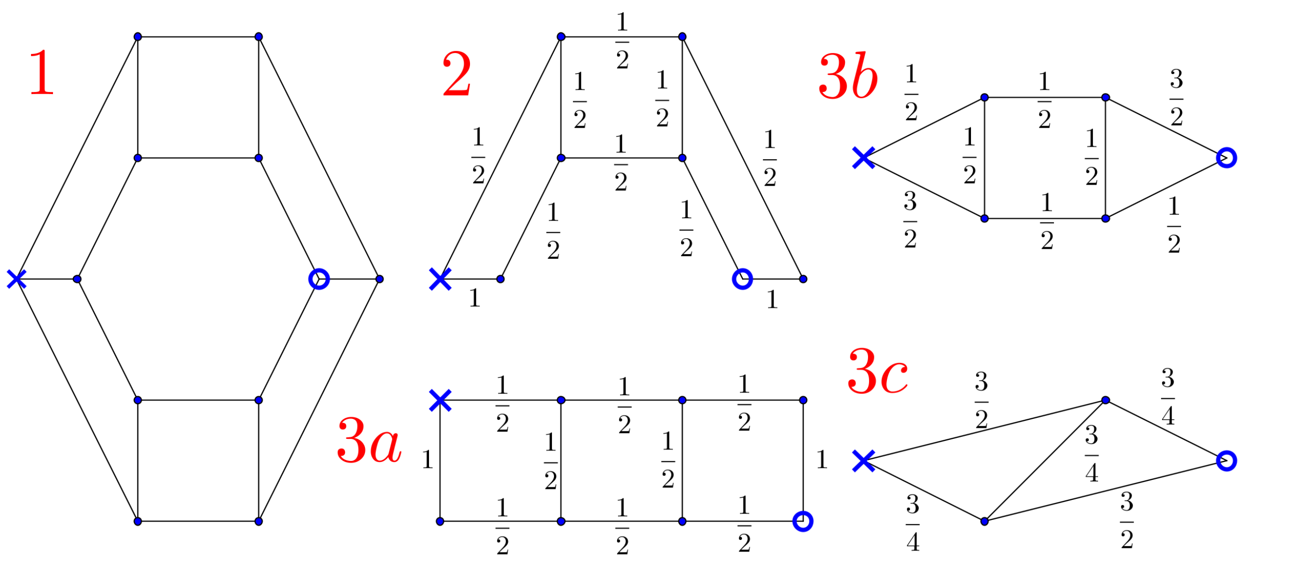
Esercizio 1. (16pt) A sinistra è rappresentato un circuito costituito da 5 resistenze. Un generatore di tensione stabilisce tra il nodo d'ingresso della corrente (a sinistra, marcato con un pallino) e il nodo di uscita della corrente (a destra, marcato con una crocetta) una differenza di potenziale di $12\,V$. Si determini quanta corrente scorre nella resistenza verticale, e in che verso.

Soluzione. Lasciamo implicita l'unità di misura del potenziale e supponiamo che il nodo di ingresso si trovi a potenziale 12 e quello di uscita a potenziale 0. Indicando con a il potenziale del nodo superiore e con b il potenziale del nodo inferiore, la prima legge di Kirchhoff applicata ai due nodi produce le corrispondenze $\frac{12-a}{2} + \frac{b-a}{1} + \frac{0-a}{3} = 0$ e $\frac{12-b}{1} + \frac{a-b}{1} + \frac{0-b}{2} = 0$. Il sistema lineare associato ha soluzione $a = \frac{324}{43}, b = \frac{336}{43}$, dunque nella resistenza verticale scorre una corrente di $\frac{12}{43}A$, da b verso a.

Esercizio 2. (20pt) Un circuito resistivo è costituito dallo scheletro di un prisma a base esagonale, dove ogni spigolo è una resistenza da $1\,\Omega$. Si determini la resistenza equivalente del circuito, supponendo che una certa differenza di potenziale sia applicata ai vertici indicati in figura.



Soluzione. Adottiamo l'approccio descritto dai seguenti punti, e successivamente illustrato: 1) realizziamo una versione planare del circuito; 2) sfruttiamo la simmetria rispetto all'asse che congiunge il nodo di ingresso con quello di uscita per abbattere il numero di nodi; 3) sfruttiamo due equivalenze in serie e due equivalenze $*\Delta$ per ricondurre il circuito ad un ponte di resistenze; 4) risolviamo il ponte di resistenze applicando nuovamente equivalenza $*\Delta$, equivalenza in serie ed equivalenza in parallelo.



Le riduzioni del punto 4) (o il metodo del potenziale) portano a concludere che la resistenza equivalente dello scheletro è $\left(\frac{3}{8} + \frac{27}{40}\right)\Omega = \frac{21}{20}\Omega = 1.05\Omega$.

Esercizio 3. (12pt) Si progetti un circuito resistivo, costituito unicamente da resistenze da $1\,\Omega$, la cui resistenza equivalente risulti $\frac{8}{13}\,\Omega$. Saranno premiate le soluzioni con un minor numero di componenti.

Soluzione. La soluzione più efficiente sfrutta il fatto che 8 e 13 sono numeri di Fibonacci consecutivi, e in particolare

$$\frac{8}{13} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}}.$$

Ciò corrisponde ad un circuito con 6 resistenze. Un'altra soluzione di semplice architettura ha 11 resistenze, montate secondo l'osservazione che $\frac{13}{8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. Un'altra configurazione elementare è la *casetta* da 10 resistenze, e un'ultima configurazione con non troppe resistenze (ma non elementare) coinvolge un ponte, e complessivamente 12 resistenze. Ovviamente vi sono infinite soluzioni, di crescente complessità e numero di componenti.