Un appunto sull'equivalenza $*\Delta$ o $Y\Delta$

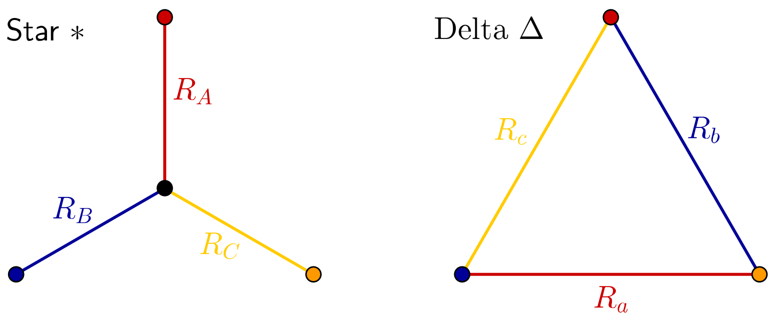
La risoluzione di circuiti contenenti unicamente resistenze o condensatori può essere sempre ricondotta alla risoluzione di un sistema lineare, dove vi sono tante incognite quante componenti e il numero di equazioni è dato dalla somma tra il numero di vertici (cui viene applicata la prima legge di Kirchhoff, analoga alla conservazione della carica) e il numero di maglie (cui viene applicata la seconda legge di Kirchhoff, analoga alla conservazione dell'energia)[1]. In molti casi, tuttavia, è sufficiente considerare cosa avviene quando più resistenze/condensatori sono disposti in serie/parallelo ed effettuare diversi passi di riduzione. Ricordiamo che:

- se più condensatori sono posti in parallelo, la capacità equivalente è la somma delle capacità dei componenti;
- se più condensatori sono posti in serie, la capacità equivalente è il reciproco della somma dei reciproci delle capacità dei componenti.

Inoltre, specularmente[2] :

- se più resistenze sono poste in serie, la resistenza equivalente è la somma delle resistenze delle componenti;
- se più resistenze sono poste in parallelo, la resistenza equivalente è il reciproco della somma dei reciproci delle resistenze delle componenti.

Il quadro di queste situazioni elementari può essere di fatto arricchito da una considerazione interessante e molto pratica. Supponiamo che ad un nodo di un circuito siano agganciate esattamente tre resistenze R_A, R_B, R_C come nella parte sinistra della prossima figura (Star$*$):



Supponiamo ora di avere un triangolo di resistenze R_a, R_b, R_c come nella parte destra della precedente figura (DeltaΔ). Se i valori di R_a, R_b, R_c sono scelti opportunamente in termini dei valori di R_A, R_B, R_C (o viceversa), in ambedue le configurazioni rappresentate la resistenza equivalente tra due qualunque nodi esterni è preservata: vale a dire che se supponiamo che tre correnti i_A, i_B, i_C entrino o escano dai nodi colorati, la differenza di potenziale tra due qualunque nodi colorati è la medesima sia a destra che a sinistra. Le leggi di Kirchhoff portano a concludere che le corrispondenze dirette sono le seguenti:

$$R_a = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}, \quad R_b = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B}, \quad R_c = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C}$$

e le corrispondenze inverse sono le seguenti:

$$R_A = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}, \quad R_B = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}, \quad R_C = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}.$$

[1] Ricordiamo che in circuito piano la *caratteristica di Eulero*, data da #facce + #vertici − #lati, è sempre pari ad 1.

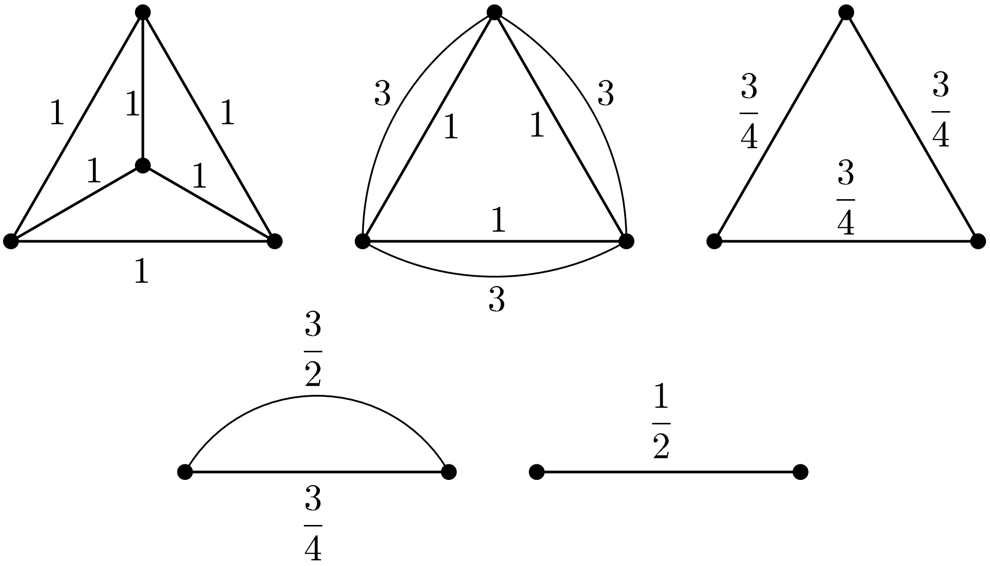
[2] Questa simmetria è dovuta al fatto che le equazioni che regolano il comportamento di un singolo condensatore e di una singola resistenza, entro opportuni regimi di tolleranza, sono $Q = C \cdot \Delta V$ e $\Delta V = R \cdot i$. Ricordando che la corrente è definita come la derivata della carica rispetto al tempo, $i = \frac{dQ}{dt}$, è possibile osservare che la carica figura in posizioni simmetriche nelle precedenti due formule.

In forma vagamente più simmetrica e compendiaria:

$$R_A R_a = R_B R_b = R_C R_c = \frac{R_a R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} = R_A R_B R_C \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \right).$$

Questo processo di conversione è noto come equivalenza Star-Delta ($*\Delta$ o $Y\Delta$) e resta valido anche nel caso in cui vi siano più di tre resistenze agganciate al nodo originale: quel che possiamo affermare, riferendoci alla nomenclatura dei grafi, è che è sempre possibile rimpiazzare un vertice e gli n lati cui appartiene con un grafo completo su n vertici (il viceversa è possibile, in generale, solo per $n = 3$). Questo principio permette di risolvere circuiti complessi evitando di fatto di trascrivere Numerose equazioni in numerose incognite: vediamone un esempio.

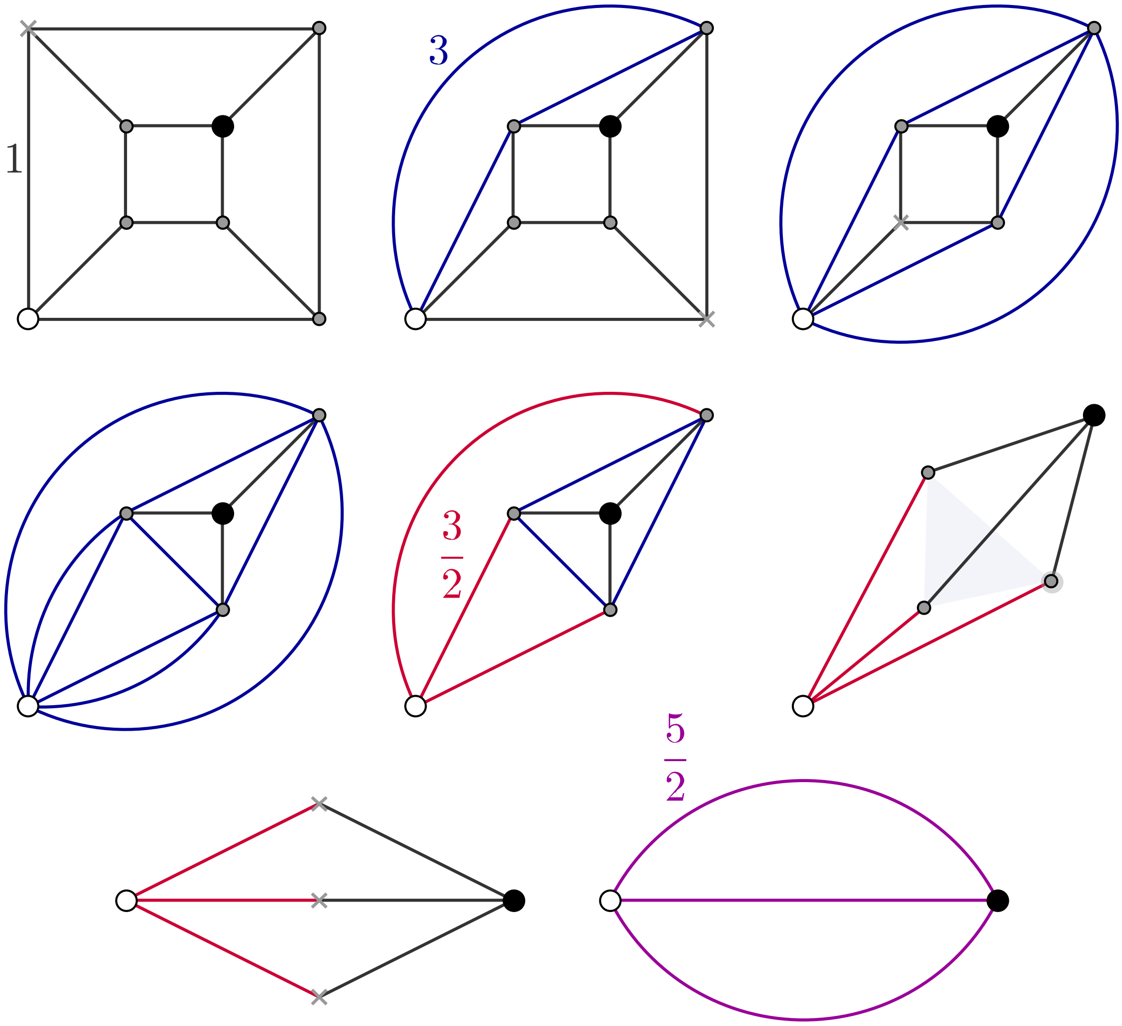
Esercizio 1. Supponiamo che un tetraedro abbia uno scheletro metallico e che ognuno dei suoi spigoli abbia una resistenza di $1\,\Omega$. Quando tra due dei vertici del tetraedro viene applicata una certa differenza di potenziale, quale risulta essere la resistenza equivalente dello scheletro?



Possiamo affermare che la risposta è $0.5\,\Omega$ effettuando riduzioni successive. Supponiamo che i nodi sottoposti a una certa differenza di potenziale siano quelli in basso: nel primo passaggio, la stella che si dirama dal nodo centrale viene rimpiazzata da un triangolo ($Y \to \Delta$). Questo dà luogo ad un doppio triangolo, i cui lati sono costituiti da una coppia di resistenze da 1 e $3\,\Omega$ poste in parallelo, la cui resistenza equivalente è $\frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}\,\Omega$. Passiamo dunque a considerare un triangolo i cui lati hanno una resistenza di $\frac{3}{4}\,\Omega$. I due lati superiori possono essere considerati come due resistenze in serie, di resistenza equivalente pari a $\frac{3}{2}\,\Omega$. Questo riconduce la configurazione originale a quella di due resistenze in parallelo da $\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{4}\,\Omega$, la cui resistenza equivalente è $\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}\,\Omega$.
Nota: avremmo certamente potuto scrivere 7 equazioni (date da 4 vertici e 3 facce) in 6 incognite (date da 6 spigoli) e risolvere il sistema lineare associato, ma l'approccio appena descritto è sicuramente più efficiente in termini di tempo, se il contesto è quello di una risoluzione "manuale" da parte di un umano.

Esercizio 2. Supponiamo che un cubo abbia uno scheletro metallico e che ognuno dei suoi spigoli abbia una resistenza di $1\,\Omega$. Quando tra due vertici opposti del cubo viene applicata una certa differenza di potenziale, quale risulta essere la resistenza equivalente dello scheletro? Qual è la resistenza equivalente nel caso in cui la suddetta differenza di potenziale venga applicata a vertici adiacenti?

Nel primo caso abbiamo $\frac{5}{6}\,\Omega$. Un suggerimento in forma grafica è presente nella prossima pagina.



Jacopo D'Aurizio
jacopo.daurizio@gmail.com
www.matemate.it