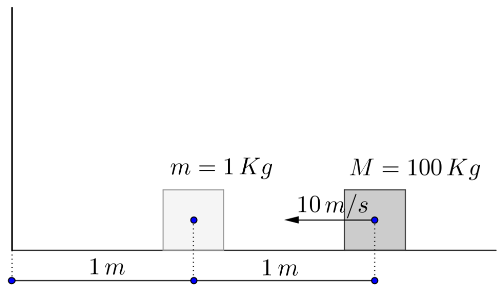
Verifica del 31/05/24 - Soluzioni

Esercizio 1. (14pt) Un proiettile che viaggia orizzontalmente con velocità $v = 300\,m/s$ urta in maniera perfettamente anelastica la massa di un pendolo balistico, che è costituita da una trave di legno, inizialmente a riposo, di massa $M = 10\,Kg$. Trascurando l'attrito dell'aria, cosa possiamo concludere sulla massa del proiettile se dopo l'urto l'innalzamento misurato della trave è di $(2 \pm 0.1)\,cm$?

Soluzione. Detta m la massa incognita del proiettile, la quantità di moto del sistema prima e dopo l'urto è mv, dunque la trave si sposta dalla posizione di equilibrio con velocità $w = \frac{m}{m+M}v$ e con energia cinetica $K = \frac{1}{2}(m+M)w^2$. Posto $\Delta h = (2 \pm 0.1)\,cm$, la conservazione dell'energia meccanica dopo l'urto fa sì che si abbia $K = (m+M)g\Delta h$, ovvero $\left(\frac{m}{m+M}v\right)^2 = 2g\Delta h$, ovvero $1 + \frac{M}{m} = \frac{v}{\sqrt{2g\Delta h}}$.
Invertendo l'ultima corrispondenza si ottiene $m = M\left(\frac{v}{\sqrt{2g\Delta h}} - 1\right)^{-1}$, e a conti fatti la massa del proiettile risulta circa $(20.9 \pm 0.53)g$ (*Il peso dell'anima*, con un cast stellare).

Esercizio 2. (17pt) Un'automobile sta viaggiando lungo una strada con velocità costante pari a $20\,m/s$. Dopo aver svoltato il guidatore si accorge che sulla sua corsia, a $20\,m$ dalla sua posizione corrente, c'è un alce di massa $150\,Kg$, e non potendo schivarlo decide di frenare, imprimendo all'automobile una decelerazione di intensità g. Questo non è sufficiente a evitare l'impatto. Supponiamo che la massa combinata di automobile e guidatore sia di $1500\,Kg$ e che l'auto, durante l'urto, trasferisca tutta la sua energia cinetica all'alce. Supponiamo inoltre che il coefficiente d'attrito tra alce e strada sia $\mu = 0.8$. Dopo l'urto, che lunghezza percorre l'animale prima che l'attrito dissipi tutta la sua energia cinetica?

Soluzione. Determiniamo prima di tutto la velocità w con la quale l'automobile urta l'alce.
Posto $M = 1500\,Kg$ e $v = 20\,m/s$, inizialmente l'automobile ha una energia cinetica pari $\frac{1}{2}Mv^2$, e il lavoro della forza frenante fa sì che si abbia $\frac{1}{2}Mv^2 - Mg(20\,m) = \frac{1}{2}Mw^2$. Nella non troppo realistica ipotesi del testo, dopo l'impatto l'alce acquisisce dunque una energia cinetica di $6\,kJ$, sufficiente a ucciderlo sul colpo. Per dissipare tutta questa energia mediante attrito, lungo un tratto di lunghezza ℓ, serve che $(150 \cdot 9.8\,N)\mu\ell = 6\,kJ$: ciò conduce a $\ell \approx 5.1\,m$.



Esercizio 3. (20pt) Lungo il medesimo binario rettilineo privo di attrito abbiamo una massa puntiforme $m = 1\,Kg$, che inizialmente si trova a $1\,m$ da una parete ed è solidale con il binario, e una massa puntiforme $M = 100\,Kg$, che inizialmente si trova a $2\,m$ dalla parete e viaggia verso la parete alla velocità di $10\,m/s$. Nel futuro del sistema ci sono un po' di urti tra le due masse e un po' di urti della massa più piccola con la parete.

Supponiamo che gli urti tra le masse siano perfettamente elastici e che gli urti tra la massa più piccola e la parete abbiano come unico effetto quello di cambiare di segno la velocità della massa più piccola.
A che distanza dalla parete e a che tempo (da quello iniziale) avvengono il secondo ed il terzo urto tra le due masse? Nell'intero futuro del sistema quanti sono gli urti tra le due masse?

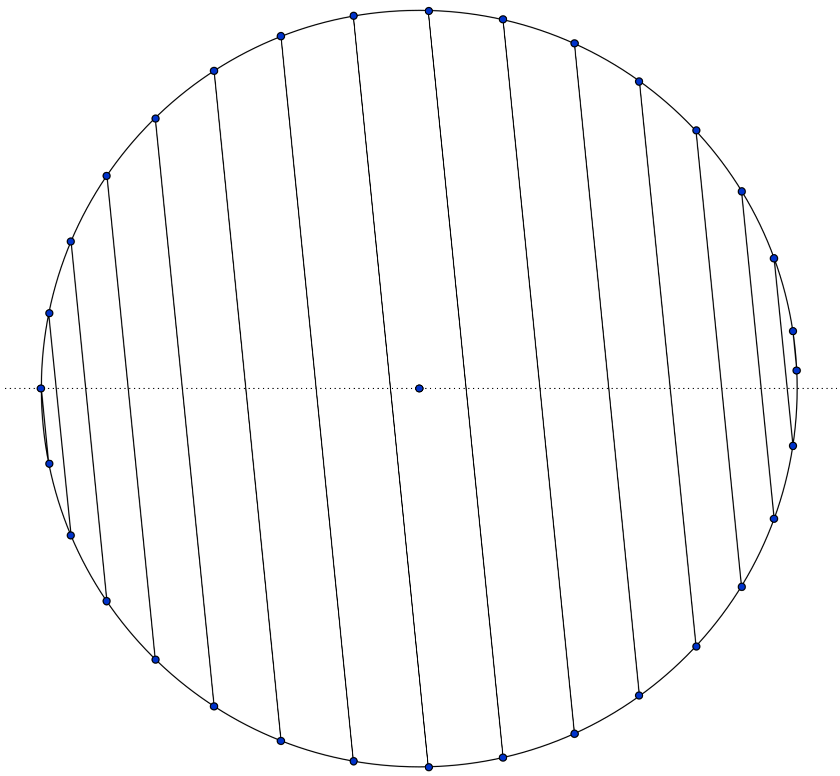
Soluzione. Mettiamoci nel sistema di riferimento in cui la parete occupa la posizione nulla e il blocco più massivo ha al tempo zero velocità $-10\,m/s$. Il primo urto tra le due masse avviene al tempo

$t_1 = 0.1\,s$. Lasciando implicite le unità di misura, a tale istante il sistema costituito dai due blocchi ha un quantità di moto pari a -1000 e una energia cinetica pari a 5000. Per conservazione di queste quantità, immediatamente dopo l'urto la massa più piccola ha velocità $-\frac{2000}{101}$ e la massa più grande ha velocità $-\frac{990}{101}$. La massa più piccola tocca dunque la parete al tempo $\frac{1}{10} + \frac{101}{2000}$, quando la massa più grande si trova a distanza $\frac{1001}{2000} \approx 0.5$ dalla parete. Subito dopo l'urto con la parete la massa piccola inverte la sua velocità, cosicché la quantità di moto del sistema diviene $-\frac{97000}{101}$ mentre l'energia totale resta 5000. Il secondo urto tra le masse avviene dunque al tempo $\frac{1}{10} + \frac{101}{2000} + \frac{7777}{460000} \approx 0.167$, con le due masse che si trovano a distanza $\frac{77}{230} \approx 0.335$ dalla parete. Nuovamente per conservazione della quantità di moto e dell'energia, dopo il secondo urto la massa più piccola acquisisce velocità $-\frac{396000}{101^2}$ e la massa più grande velocità $-\frac{94010}{101^2}$. La massa più piccola finisce dunque per toccare nuovamente la parete al tempo $\frac{1}{10} + \frac{101}{2000} + \frac{7777}{460000} + \frac{71407}{8280000}$, quando il blocco più massivo si trova a distanza $\frac{9191}{36000} \approx 0.255$ dalla parete. Il contatto con la parete inverte la velocità del blocco più piccolo e il terzo urto tra le masse avviene al tempo

$$\frac{1}{10} + \frac{101}{2000} + \frac{7777}{460000} + \frac{71407}{8280000} + \frac{93757391}{17640360000} \approx 0.181,$$

quando le due masse si trovano a distanza $\frac{101101}{490010} \approx 0.206$ dalla parete.

Considerando il piano delle fasi dove la coordinata x è 10 volte la velocità del blocco più massivo e la coordinata y è la velocità del blocco meno massivo, per conservazione dell'energia il sistema evolve lungo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 100^2$: contatti tra il blocco più piccolo e la parete corrispondono a simmetrie rispetto all'asse delle ascisse, situazioni pre/post-urto tra i blocchi corrispondono a spostamenti paralleli alla retta di equazione $10x + y = 0$, per conservazione della quantità di moto. La seconda questione è così ricondotta a contare quante sono le corde raffigurate nella seguente illustrazione:



Per semplici questioni trigonometriche (corrispondenza tra angoli al centro e angoli alla circonferenza) o per conteggio diretto, la risposta all'ultima domanda è 16.