SEM 2024 - Esercizi L5(N) - Soluzioni

Simil-22 arretrato. Tra tutte le frazioni della forma $\frac{a}{b}$ con a e b numeri naturali minori di 1000, qual è quella che meglio approssima (ossia con la minima distanza da) $\sqrt{37}$?

Soluzione. Per il Teorema di Lagrange, le migliori approssimazioni razionali di una quantità irrazionale sono quelle date dai convergenti della frazione continua. Poiché $37 = 6^2 + 1$ si ha $\sqrt{37} = [6; \overline{12}]$, dunque la risposta è data da $6 + \frac{1}{12+\frac{1}{12}} = \frac{882}{145}$.

Esercizio 1. Si dimostri che tra i numeri naturali non esistono quadrati che terminano con le cifre 11.

Soluzione. Se $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$ necessariamente $n \equiv \pm 1 \pmod{10}$. Possiamo pertanto assumere $n = 10k \pm 1$, da cui segue $n^2 = 10(10k^2 \pm 2k) + 1$. Poiché $10k^2 \pm 2k$ è certamente una quantità pari, un quadrato non può terminare per 11. In alternativa, $n^2 \equiv 11 \pmod{100}$ comporta $n^2 \equiv 3 \pmod{4}$, ma 3 non è un residuo quadratico $\pmod{4}$.

Esercizio 2. Si dimostri che in una qualsiasi potenza di 3 la cifra delle decine è pari.

Soluzione. È sufficiente considerare le potenze di 3 $\pmod{20}$: queste si ripetono in un ciclo di lunghezza 4, i cui elementi sono $1, 3, 9, 7$. La tesi segue immediatamente.

Esercizio 3. Si determini il più piccolo numero naturale n tale da soddisfare simultaneamente

$$n \equiv 9 \pmod{17}, \quad n \equiv 7 \pmod{13}, \quad n \equiv 6 \pmod{11}.$$

Soluzione. Indicando con $\frac{1}{2}$ l'inverso moltiplicativo di 2, le tre condizioni possono essere espresse come $n \equiv \frac{1}{2} \pmod{11, 13, 17}$. Dal Teorema cinese del resto segue $n \equiv \frac{1}{2} \pmod{11 \cdot 13 \cdot 17}$, dunque la soluzione è data da $\frac{11 \cdot 13 \cdot 17 + 1}{2} = \frac{221 \cdot 11 + 1}{2} = \frac{2432}{2} = 1216$.

Esercizio 4. Si dimostri che esistono 69 numeri naturali consecutivi, nessuno dei quali è primo.

Soluzione. Consideriamo un insieme $\{p_1, \ldots, p_{69}\}$ di primi distinti. Se imponiamo $n \equiv -j \pmod{p_j^2}$ abbiamo che certamente $n + j$ non è un numero primo. D'altra parte il sistema dato dalle congruenze $n \equiv -j \pmod{p_j^2}$ per ogni j tra 1 e 69 ammette sicuramente una soluzione modulo $p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_{69}^2$, che produce infiniti intervalli $[n+1, n+69]$ costituiti unicamente da numeri composti. Alternativamente è sufficiente considerare l'intervallo $[70! + 2, 70! + 70]$ oppure l'intervallo $[M + 2, M + 70]$ dove M è il minimo comune multiplo degli interi da 1 a 70.

Esercizio 5. Si determinino le ultime tre cifre (centinaia, decine, unità) di 2^{69}.

Soluzione. Per determinare le ultime 3 cifre è sufficiente determinare il resto di 2^{69} nella divisione per 8 e per 125. Palesemente, $2^{69} \equiv 0 \pmod{8}$. Meno palesemente, $2^7 \equiv 3 \pmod{125}$ e $3^5 \equiv -7 \pmod{125}$, da cui

$$2^{69} \equiv \frac{1}{2} 3^{10} \equiv \frac{49}{2} \equiv \frac{49 + 125}{2} \equiv 87 \pmod{125}.$$

Dal TCR le condizioni $n \equiv 0 \pmod{8}$ e $n \equiv 87 \pmod{125}$ equivalgono a $n \equiv 712 \pmod{1000}$.

Esercizio 6. Si dimostri che nel piano cartesiano la circonferenza di equazione $x^2+y^2=69$ non attraversa punti a coordinate intere, e neppure punti a coordinate razionali.

Soluzione. Il fatto che non esistano coppie di interi con somma dei quadrati uguale a 69 è di immediata verifica. Meno ovvio è il fatto che l'equazione diofantea $a^2+b^2=69c^2$ non abbia soluzioni intere eccetto $(0,0,0)$, e che ciò equivalga all'assenza di punti razionali su $x^2+y^2=69$. Tuttavia è semplice osservare che $a^2+b^2=69c^2$ comporta $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod 3$, da cui segue $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$. Posto dunque $a=3a_1$ e $b=3b_1$ si ottiene $3(a_1^2+b_1^2)=23c^2$, da cui $c \equiv 0 \pmod 3$, $c=3c_1$ e $a_1^2+b_1^2=69c_1^2$. Questo avvia un processo di *discesa infinita* (di Fermat) che permette facilmente di concludere.

Esercizio 7. La successione dei numeri di Fibonacci è definita attraverso $F_0=0, F_1=1$ e $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quali sono le ultime due cifre di F_{69}?

Soluzione. Per lo stesso principio dell'esercizio 5, è sufficiente determinare $F_{69} \pmod 8$ e $F_{69} \pmod{25}$. La successione di Fibonacci $\pmod 8$ ha un periodo di lunghezza 12, costituito dalle classi di resto $0,1,1,2,3,5,0,5,5,2,7,1$. In particolare $F_{69} \equiv F_9 \equiv 2 \pmod 8$. La lunghezza del periodo della successione $\pmod{25}$ tuttavia è 100, dunque la determinazione di $F_{69} \pmod{25}$ è un po' tediosa. Si può abbreviare la fase compilativa osservando che la formula di Binet $F_n = \frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$ comporta

$$F_{3k} = F_k\left(3(-1)^k + 5F_k^2\right),$$

dunque è sufficiente determinare $F_{23} \pmod{25}$. Da $F_7=13$ ed $F_8=21$ possiamo determinare per triplicazione F_{21} ed F_{24} e da questi ricavare $F_{23}=\frac{F_{21}+F_{24}}{2}$, da cui $F_{23} \equiv 7 \pmod{25}$. Nuovamente per triplicazione $F_{69} \equiv 19 \pmod{25}$ e per TCR $F_{69} \equiv 94 \pmod{100}$.

Esercizio 8. Si dimostri che esistono infiniti numeri di Fibonacci la cui rappresentazione decimale termina con 69 zeri consecutivi.

Soluzione. Osserviamo che la successione di Fibonacci è periodica modulo n per qualunque numero naturale n. Infatti le coppie $c_k = (F_k \pmod n, F_{k+1} \pmod n)$ appartengono ad un insieme finito e il valore di c_{k+1} dipende unicamente dal valore di c_k. Segue che per qualche numero naturale N (potenzialmente grande, ma mai più grande di n^2-1) vale $c_k = c_{k+N}$, da cui $F_k \equiv F_{k+N}$. Poiché $F_0=0$, la successione di Fibonacci contiene infiniti multipli di qualsiasi prefissato numero n, incluso il caso particolare $n=10^{69}$. Questo dimostra che esistono infiniti numeri di Fibonacci che terminano con *almeno* 69 zeri consecutivi. D'altra parte $\nu_5(F_k)=\nu_5(k)$ come conseguenza di $F_{5k}=5F_k(F_{2k}^2+(-1)^kF_k^2+1)=5F_k(5F_k^4+5(-1)^kF_k^2+2)$. In particolare, i k per cui $10^{69} \mid F_k$ devono essere multipli di 5^{69}. Rimuovendo dall'ultimo insieme i k multipli di 5^{70} otteniamo infiniti numeri di Fibonacci che terminano con almeno 69 zeri consecutivi ma non sono multipli di 5^{70}, dunque terminano con *esattamente* 69 zeri consecutivi. Se esplicitiamo il periodo della successione di Fibonacci modulo 2^{69}, trovando $3 \cdot 2^{68}$, abbiamo anche che il più piccolo numero di Fibonacci positivo che soddisfa le ipotesi è F_M con $M = 15 \cdot 10^{68}$.

Esercizio 9. Qual è la lunghezza del periodo della rappresentazione decimale di $\frac{1}{69}$?

Soluzione. A causa del fatto che $0.\overline{9} = 1$, se p è un numero primo distinto da 2 e da 5 la lunghezza del periodo della rappresentazione decimale di $\frac{1}{p}$ è l'*ordine moltiplicativo* di 10 $\pmod{p}$, ossia il più piccolo numero naturale $k > 0$ tale per cui $10^k \equiv 1 \pmod{p}$. In virtù del piccolo Teorema di Fermat l'ultima quantità è certamente un divisore di $p-1$. Dal lemma di Bézout abbiamo $\frac{1}{69} = \frac{8}{23} - \frac{1}{3}$, e poiché $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ le rappresentazioni decimali di $\frac{1}{69}$ e $\frac{1}{23}$ hanno periodi della medesima lunghezza, coincidente con l'ordine moltiplicativo di 10 $\pmod{23}$. Poiché $23 - 1 = 2 \cdot 11$, tale ordine può essere solo $1, 2, 11$ oppure 22. D'altre parte né 10^2 né 10^{11} sono $\equiv 1 \pmod{23}$, dunque la risposta è 22: 10 è un generatore moltiplicativo modulo 23. *Nota*: il fatto che $10^{11} \equiv -1 \pmod{23}$ è equivalente al fatto che 10 non è un residuo quadratico $\pmod{23}$.

Esercizio 10. Abbiamo una successione definita da $A_0 = A_1 = 1$ e $A_{n+2} = 5A_{n+1} - 3A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Esistono multipli di 69 tra i termini della successione? In caso affermativo, qual è il più piccolo di questi termini?

Soluzione. La questione è molto più semplice di quanto potrebbe sembrare a prima vista: condizione necessaria affinché la successione contenga multipli di 69 è che contenga multipli di 3. D'altra parte la successione $\pmod{3}$ soddisfa $A_0 \equiv A_1 \equiv 1 \pmod{3}$ e $A_{n+2} \equiv -A_{n+1} \pmod{3}$, dunque è data da $1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ e chiaramente non contiene multipli di 3, dunque neppure di 69.

Esercizio 11. Quali sono le ultime due cifre (decine, unità) del numero naturale più vicino a $(2+\sqrt{3})^{69}$?

Soluzione. L'osservazione-chiave è che $N = (2+\sqrt{3})^{69} + (2-\sqrt{3})^{69}$ è certamente un numero naturale, ed è esattamente il numero naturale di cui parla il problema, vista la positività ma la straordinaria piccolezza di $(2-\sqrt{3})^{69}$. Consideriamo allora la successione definita da $a_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$: questa soddisfa $a_0 = 2, a_1 = 4$ e $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. A questo punto possiamo procedere come nella soluzione dell'esercizio 7. Il periodo $\pmod{4}$ ha lunghezza 2 ed è costituito dai termini $2, 0$. Il periodo $\pmod{25}$ ha lunghezza 15 ed è costituito dai termini $2, 4, 14, 2, 19, 24, 2, 9, 9, 2, 24, 19, 2, 14, 4$. Poiché $69 \equiv 1 \pmod{2}$ abbiamo $N \equiv 0 \pmod{4}$. Poiché $69 \equiv 9 \pmod{15}$ abbiamo $N \equiv 2 \pmod{25}$. Dal TCR segue che la risposta è 52.