SEM 2024 - Esercizi L7(A) - Soluzioni

Esercizio 1. Quali sono le soluzioni reali di $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=2$?

Soluzione. $x=0$ è palesemente soluzione, ed è l'unica in quanto $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$ è una funzione pari e convessa.

Esercizio 2. Si determinino tutte le soluzioni reali di

$$10^x+11^x+12^x=13^x+14^x.$$

Soluzione. $x=2$ è soluzione, ed è l'unica in quanto dividendo ambo i membri per 12^x si ha che LHS è una funzione decrescente mentre RHS è una funzione crescente.

Esercizio 3. Sapendo che $x\in\mathbb{R}$ soddisfa $x^3+x^2=1$, quanto vale $x^3+x^5+x^6+x^7$?

Soluzione. Da $x^3=-x^2+1$ seguono $x^4=-x^3+x=x^2+x-1$, $x^5=x^3+x^2-x=-x+1$, $x^6=-x^2+x$ e infine $x^7=-x^3+x^2=2x^2-1$. Segue che il valore cercato è 1.

Esercizio 4. Si determinino le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b+c} & = & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c+a} & = & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{c}+\frac{1}{a+b} & = & \frac{1}{4} \end{cases}$$

Soluzione. Possiamo assumere senza perdita di generalità che ogni somma di $1,2$ o 3 termini tra a,b,c sia non nulla. Dalle informazioni iniziali seguono

$$(ab+ac,ab+bc,ac+bc)\propto(2,3,4)\quad\longrightarrow\quad(ab,bc,ac)\propto(1,5,3)\quad\longrightarrow\quad(a,b,c)\propto(3,5,15).$$

Imponendo $(a,b,c)=\lambda(3,5,15)$ nella prima equazione del sistema originale si ottiene $\lambda=\frac{23}{30}$, da cui $(a,b,c)=\left(\frac{23}{10},\frac{23}{6},\frac{23}{2}\right)$.

Esercizio 5. Dato $p(x)$ polinomio a coefficienti interi non costante (cioè di grado almeno 1), si dimostri che l'insieme $\{p(0),p(1),p(2),p(3),\ldots\}$ non può contenere esclusivamente numeri primi. *Nota*: si osservi che, pur fallendo, $p(x)=x^2+x+41$ ci prova fortissimo.

Soluzione. Poiché $(a-b)\mid(a^n-b^n)$ per qualsiasi numero naturale n (prodotti notevoli), per qualsiasi polinomio $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ si ha $(a-b)\mid(p(a)-p(b))$. Supponiamo che $p(x)$ assuma su $\mathbb{N}$ unicamente valori primi e poniamo $q=p(0)$. Dal lemma abbiamo che $p(x)$ deve assumere il valore q anche per $x=q,x=2q,x=3q$ eccetera. Da Ruffini abbiamo che gli unici polinomi che assumono infinite volte il medesimo valore sono quelli costanti, contro le ipotesi.
$p(x)=x^2+x+41$ assume valori primi per ogni $x\in[0,39]$, ma $p(40)=41^2$.

Esercizio 6. Sapendo che

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{n}{k}}{\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}}=\frac{23}{11}$$

quanto vale n?

Soluzione. Sottraendo 2 da ambo i membri e passando ai reciproci il problema diventa equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k=11\cdot 2^n.$$

Osserviamo che LHS conta quanto segue: dato un gruppo di n persone, dapprima scegliamo un sottoinsieme di $k\geq 1$ persone e assegniamo una medaglia d'argento ad ogni persona selezionata. Dopodiché scegliamo una persona con una medaglia d'argento e sostituiamo la sua medaglia con una d'oro. Equivalentemente possiamo prima scegliere a chi conferire la medaglia d'oro e solo dopo a chi assegnare argenti, riservardoci l'opzione anche di non assegnare argenti. Segue $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k=n2^{n-1}$, da cui la soluzione $n=22$.

Esercizio 7. Sapendo che $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ soddisfano

$$\begin{cases} a^2+ab+b^2 &= 13^2\\ b^2+bc+c^2 &= 14^2\\ c^2+ca+a^2 &= 15^2\end{cases}$$

quanto vale $ab+ac+bc$?

Soluzione. Consideriamo un triangolo di lati $13,14,15$ e indichiamo con a,b,c le distanze del punto di Fermat/Torricelli dai vertici. Il Teorema del coseno per l'angolo di $120°$ ci fornisce esattamente le relazioni trascritte nel sistema. Per la formula di Erone l'area del triangolo è 84, e questa coincide con $\frac{1}{2}(ab+bc+ac)\sin(120°)$ in quanto il punto di Torricelli è interno. Segue $ab+ac+bc=112\sqrt{3}$.

Esercizio 8. Si dimostri che se a,b,c sono le lunghezze dei lati di un triangolo allora

$$(a^2+b^2+c^2)^2\geq 2(a^4+b^4+c^4).$$

Soluzione. Per un triangolo di lati a,b,c la differenza tra LHS e RHS è 16 volte il quadrato dell'area:

$$16\Delta^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4).$$

La tesi segue immediatamente.

Esercizio 9. Sulla lavagna sono trascritti 69 numeri reali distinti e diversi da zero. Ogni studente della classe, chiamato/a alla lavagna, sceglie due numeri reali a e b trascritti e li rimpiazza con $a+\frac{b}{2}$ e $b-\frac{a}{2}$. Si dimostri che, indipendentemente dalle scelte individuali, l'insieme dei numeri reali che si trovano sulla lavagna al termine delle operazioni non può coincidere con quello iniziale.

Soluzione. È sufficiente osservare che la somma dei quadrati dei numeri sulla lavagna definisce una sorta di *entropia*, che cresce strettamente al primo passaggio e cresce almeno debolmente nei passaggi successivi:

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5}{4}(a^2+b^2)\geq(a^2+b^2).$$

Esercizio 10. Si determinino tutte le coppie di interi (x, y) tali per cui $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

Soluzione. È ovvio che qualunque coppia della forma $(n, -n)$ fornisca una soluzione. Escludendo tali soluzioni banali possiamo assumere $x + y \neq 0$ e ricondurci a studiare le soluzioni intere di

$$x^2 - xy + y^2 = x + y,$$

che descrive un'ellisse nel piano cartesiano. Completando i quadrati e moltiplicando per 4 possiamo esprimere l'equazione come

$$(2x - y)^2 + 3y^2 = 2(2x - y) + 6y$$

o come

$$(2x - y - 1)^2 + 3(y - 1)^2 = 4.$$

Le soluzioni intere di $a^2 + 3b^2 = 4$ sono di immediata determinazione e ci danno che le soluzioni non banali dell'equazione di partenza sono soltanto $(2, 2), (2, 1), (1, 2), (1, 0), (0, 1)$.

Esercizio 11. Si dimostri che

$$15 < \sum_{k=1}^{69} \frac{1}{\sqrt{k}} < 16.$$

Soluzione (sketch). È sufficiente far ricorso alle disuguaglianze

$$\sqrt{k + \frac{1}{2}} - \sqrt{k - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sqrt{k} - \sqrt{k - 1}$$

e a somme telescopiche.

Esercizio 12. Si determinino tutte le soluzioni reali di

$$(3x + 1)(4x + 1)(6x + 1)(12x + 1) = 2.$$

Soluzione. Moltiplicando ambo i membri per $16 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 4$ possiamo esprimere il problema come

$$(48x + 16)(48x + 12)(48x + 8)(48x + 4) = 3 \cdot 2^{12}.$$

Posto $y = 48x + 10$ l'equazione diviene

$$(y^2 - 4)(y^2 - 36) = 3 \cdot 2^{12}.$$

Posto $z = y^2 - 20$ abbiamo $z^2 - 16^2 = 3 \cdot 2^{12}$, da cui $z = \pm 112$, $y = \pm 4\sqrt{33}$ e $x = \frac{-5 \pm 2\sqrt{33}}{24}$.

Esercizio 13. Si determini esplicitamente il valore della somma

$$S = \frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4!}{2! + 3! + 4!} + \ldots + \frac{2024}{2022! + 2023! + 2024!}.$$

Soluzione. Osserviamo che

$$\frac{n + 2}{n! + (n + 1)! + (n + 2)!} = \frac{n + 2}{n!(n + 2)^2} = \frac{1}{(n + 2)n!} = \frac{n + 1}{(n + 2)!} = \frac{(n + 2) - 1}{(n + 2)!} = \frac{1}{(n + 1)!} - \frac{1}{(n + 2)!}.$$

Sommando gli estremi per n che va da 1 a 2022 otteniamo pertanto $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2024!}$.

Esercizio 14. Si determinino tutti gli interi n per cui $\frac{n^5-1}{n-1}$ risulta essere un quadrato.

Soluzione. La funzione $f(x) = \frac{x^5-1}{x-1}$ non è definita nel punto $x = 1$, ma altrove coincide con il polinomio $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Osserviamo che se per qualche $x \in \mathbb{Z}$ si ha che $p(x)$ è un quadrato, di certo lo è anche

$$q(x) = 4p(x) = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4.$$

Osserviamo inoltre che $(2x^2 + x)^2$ e $(2x^2 + x + 1)^2$ hanno coefficienti molto simili a quelli di $q(x)$:

$$(2x^2 + x)^2 = 4x^4 + 4x^3 + x^2, \qquad (2x^2 + x + 1)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1.$$

È chiaro che laddove vale la doppia disuguaglianza $(2x^2 + x)^2 < q(x) < (2x^2 + x + 1)^2$ il termine centrale non ha alcuna possibilità di essere un quadrato, in quanto strettamente compreso tra quadrati consecutivi. La disuguaglianza $q(x) > (2x^2 + x)^2$ vale sempre, poiché $3x^2 + 4x + 4$ ha termine di testa positivo ma discriminante negativo. Poiché $q(x) - (2x^2 + x + 1)^2 = (x + 1)(x - 3)$ segue che $f(x)$ può essere un quadrato solo per gli x interi tra -1 e 3, 1 escluso. Esaminando a mano questi pochi casi si ha che le soluzioni sono date da $n \in \{-1, 0, 3\}$.