SEM 2024 - Esercizi L8(M) - Soluzioni

1. La successione di Lucas può essere definita attraverso $L_0 = 2, L_1 = 1$ e $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quanto vale $L_{3072} \pmod{100}$?

Soluzione. I primi termini della successione di Lucas sono $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322$. Potremme congetturare che il valore di L_{2m} dipenda unicamente dal valore di L_m, scoprendo a posteriori di aver torto, ma non troppo. Per la formula di Binet si ha infatti $L_n = \varphi^n + \overline{\varphi}^n$, dove φ (il rapporto aureo) e $\overline{\varphi}$ sono le radici di $x^2 - x - 1$, e in quanto tali soddisfano $\varphi\overline{\varphi} = -1$. In particolare

$$L_n^2 = \varphi^{2n} + \overline{\varphi}^{2n} + 2(\varphi\overline{\varphi})^n = L_{2n} + 2(-1)^n,$$

dunque il valore di L_{2n} (così come la classe di resto $\pmod{100}$) può essere dedotto da quello di L_n elevando al quadrato e successivamente sommando o sottraendo 2, a seconda della parità di n. Poiché $3072 = 3 \cdot 2^{10}$, possiamo determinare $L_{3072} \pmod{100}$ a partire da $L_3 = 4$ applicando poche volte la precedente formula di duplicazione:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L_{3\cdot 2^k} \pmod{100}$	4	18	22	86	94	38	42	66	54	18	22

---

2. La successione di Fibonacci può essere definita attraverso $F_0 = F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quanto vale $F_{3072} \pmod{100}$?

Soluzione. Non sempre la pigrizia è svantaggiosa: almeno in questo frangente l'idea di riciclare quanto appena prodotto è molto efficace. Dalla formula di Binet $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \overline{\varphi}^n\right)$ segue infatti

$$F_{2n} = F_n \cdot L_n,$$

dunque basta aggiungere una riga alla precedente tabella per trovare quanto richiesto tramite poche moltiplicazioni $\pmod{100}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L_{3\cdot 2^k} \pmod{100}$	4	18	22	86	94	38	42	66	54	18	22
$F_{3\cdot 2^k} \pmod{100}$	2	8	44	68	76	72	4	88	16	52	64

C'è modo di essere ancora più efficienti, ad esempio lavorando separatamente $\pmod 4$ e $\pmod{25}$ e accorgendosi di un fatto non ovvio, che investigheremo nella prossima lezione: poiché 5 è proprio il discriminante del polinomio caratteristico $x^2 - x - 1$, il comportamento della successione di Fibonacci (o di Lucas) modulo una potenza di 5 è molto meno erratico di quanto potrebbe apparire a prima vista.

---

3. L'unica soluzione reale di $2^x = 10$ si denota come $\log_2(10)$. Si dimostri che tale quantità è irrazionale.

Soluzione. Indipendentemente dalla notazione, la quantità x di cui ci stiamo occupando è un numero strettamente compreso tra 3 e 4, poiché $2^3 < 10 < 2^4$ e 2^x è per definizione una funzione monotona. Sull'impronta della dimostrazione euclidea dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, lavoriamo per assurdo. Se $x = \log_2(10)$ fosse una quantità razionale sarebbe una frazione della forma $\frac{p}{q}$ con p, q numeri naturali non nulli, coprimi e tali da realizzare $p > 3q$ per quanto detto in precedenza. Osserviamo a questo punto che

$$2^{p/q} = 10 \quad \longrightarrow \quad 2^p = 10^q$$

e identificando l'ultima uguaglianza con la Danimarca, *c'è del marcio in Danimarca*. Una forma equivalente dell'ultima identità è infatti $2^{p-q} = 5^q$, che è assurda: 2^{p-q} è certamente una quantità pari, 5^q è certamente una quantità dispari. Segue $\log_2(10) \notin \mathbb{Q}$, QED.

4. Si dimostri che esiste una potenza di 2 in cui le cifre più a sinistra della rappresentazione decimale sono 1000.

Soluzione. Poniamoci un obiettivo leggermente più complesso rispetto a quanto richiesto, ossia di *costruire* una potenza di 2 che risulti appena più grande di una potenza di 10. È un fatto ben noto che 2^{10} sia poco più grande di 10^3, e da ciò segue che $10 > 3\log_2(10)$, o $\log_2(10) < \frac{10}{3}$. Viceversa una risposta alla questione è fornita da una buona approssimazione razionale di $\log_2(10)$ che risulti un'approssimazione per eccesso. Abbiamo già menzionato (anche se non dimostrato) che le migliori approssimazioni razionali di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono date dai convergenti della frazione continua, e che questi forniscono alternativamente approssimazioni per difetto e per eccesso. Osserviamo che la frazione continua di $\alpha = \log_2(10)$ ha infiniti termini per quanto provato nell'esercizio precedente. Nominalmente

$$\log_2(10) = [3; 3, 9, 2, 2, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 18, 1, 6, \ldots]$$

A parte la celebre $[3; 3] = \frac{10}{3}$, le migliori approssimazioni *per eccesso* di $\alpha = \log_2(10)$ sono pertanto $[3; 3, 9, 2] = \frac{196}{59}$, $[3; 3, 9, 2, 2, 4] = \frac{2136}{643} = \beta$ e infinite altre. Per le proprietà dei convergenti, $\beta - \alpha$ vale al massimo $\frac{1}{643^2}$, dunque $2^\beta - 2^\alpha = 2^\beta - 10$ vale al massimo $\frac{10\ln 2}{643^2}$ per il Teorema di Lagrange (non quello sulle frazioni continue ma quello sulle derivate). Abbiamo pertanto

$$10 < 2^{\frac{2136}{643}} < 10 + \frac{10\ln(2)}{643^2} < 10 \cdot 2^{\frac{1}{643^2}}$$

ed elevando gli estremi alla 643-esima potenza otteniamo

$$10^{643} < 2^{2136} < 10^{643} \cdot 2^{\frac{1}{643}}.$$

Poiché $2^{\frac{1}{643}}$ è appena più grande di un millesimo, la rappresentazione decimale di 2^{2136} comincia certamente con 100. Passando all'ottavo convergente $\gamma = \frac{28738}{8651}$ abbiamo che 2^{28738} comincia sicuramente con le cifre 1000. In verità funziona già β:

$$2^{2136} = 1000162894137616\ldots \quad \text{(644 cifre)}.$$

Osserviamo a posteriori che per affrontare la questione originale non è necessario conoscere *quali* siano i termini della frazione continua di α, è sufficiente sapere che questi sono infiniti, ossia che $\alpha \notin \mathbb{Q}$ come provato in precedenza.

---

5. Abbiamo a disposizione un dado a 6 facce, equo. Lanciandolo, eventualmente più volte, vogliamo selezionare uniformemente a caso una persona tra 24. Quale procedura possiamo implementare?

Soluzione. Adoperando una piccola dose di *pensiero laterale* possiamo accorgerci che è sufficiente un unico lancio (!!!). Possiamo ad esempio

- orientare arbitrariamente gli spigoli del cubo e lanciarlo all'interno di un cuneo. 12 spigoli e 2 possibili orientazioni ci danno una spazio di probabilità uniforme con $12 \cdot 2 = 24$ elementi;
- lanciare il dado all'interno di un cono. 8 vertici e 3 possibili orientazioni per le facce lì concorrenti ci danno una spazio di probabilità uniforme con $8 \cdot 3 = 24$ elementi;
- lanciare (come di consueto) il dado su una superficie piatta. 6 facce e 4 possibili orientazioni per la superficie laterale del cubo ci danno una spazio di probabilità uniforme con $6 \cdot 4 = 24$ elementi.

6. Un mazzo di carte napoletane viene mescolato e vengono girate le prime 3 carte del mazzo.
Con quale probabilità queste si presentano in ordine strettamente decrescente di valore?
Si riporti la somma tra il numeratore e il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.
Soluzione. Siamo in uno spazio di probabilità finito, per cui *Probabilità* è sinonimo di *Combinatoria*: in particolare è sufficiente contare le configurazioni possibili e quelle favorevoli. Osserviamo che l'ordine conta: il medesimo insieme di tre carte corrisponde ad un caso favorevole oppure no a seconda di quale carta viene estratta per prima, per seconda e per ultima. I casi totali sono dunque $\binom{40}{3}3! = 40 \cdot 39 \cdot 38$. In una configurazione favorevole i valori estratti sono necessariamente diversi tra loro, e i semi della prima, della seconda e della terza carta sono completamente indipendenti tra di loro. Non è davvero rilevante se l'ordinamento dei valori è quello del tressette, della briscola o di un qualche altro gioco:
le configurazioni favorevoli sono comunque $\binom{10}{3}4^3$. Semplificando, la probabilità cercata è

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 4^3}{6 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{2^5}{13 \cdot 19} = \frac{32}{247} \approx 13\%.$$

---

7. Diciamo che una parola è "leggibile" se non ha vocali consecutive ed ha al più due consonanti consecutive. Quanti anagrammi della parola RECIPROCARE sono leggibili, inclusa la parola stessa?
Soluzione. Come in tanti problemi di Combinatoria, la chiave di volta è un'oculata suddivisione in casi. Un anagramma leggibile è univocamente determinato da

- l'anagramma di RCPRCR che si ottiene cancellando tutte le vocali
- l'anagramma di EIOAE che si ottiene cancellando tutte le consonanti
- il pattern secondo sui vocali e consonanti si interlacciano tra loro.

Per quanto visto a lezione vi sono 60 anagrammi di RCPRCR e altrettanti di EIOAE. L'unica parte "difficile" è contare quanti pattern soddisfano le ipotesi, ed è pratico operare una sotto-classificazione:

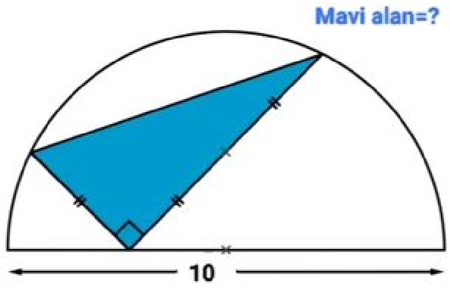
- CVCVCVCVC è l'unico pattern in cui troviamo una consonante all'inizio e una consonante alla fine della parola;
- in 5 pattern abbiamo una consonante all'inizio ma non alla fine della parola;
- in 5 pattern abbiamo una consonante alla fine ma non all'inizio della parola;
- in $\binom{4}{2} = 6$ pattern abbiamo una vocale sia all'inizio che alla fine della parola.

In sintesi, gli anagrammi leggibili sono $60 \cdot 60 \cdot (1 + 5 + 5 + 6) = 61200$.
Folklore: alcuni anagrammi leggibili e di senso compiuto sono RAPIRE ROCCE, CERCO PARERI, RICORRE PACE, ERRI PROCACE, RICERCO RAPE, CARRI PECORE, RICREO CAPRE.
CREARE CORPI e CREARE PORCI sono divertenti, ma per le nostre specifiche non sono leggibili.

8. Le altezze di un triangolo misurano $90, 99, 110$. Qual è l'area del triangolo?

Soluzione. È sufficiente sfruttare ad arte il principio di scala. In un triangolo qualunque le lunghezze delle altezze sono inversamente proporzionali alle lunghezze dei corrispondenti lati: nel nostro caso ciò comporta che la terna delle lunghezze dei lati sia proporzionale a $(9, 10, 11)$. Per la formula di Erone/Archimede, un triangolo con lati lunghi $9, 10, 11$ ha area $30\sqrt{2}$, dunque altezze lunghe $\frac{60\sqrt{2}}{11}, \frac{60\sqrt{2}}{10}, \frac{60\sqrt{2}}{9}$. Scalando tutte le lunghezze di un fattore $\frac{990}{60\sqrt{2}}$ otteniamo un triangolo che soddisfa le ipotesi, con area

$$30\sqrt{2}\left(\frac{990}{60\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{16335}{2\sqrt{2}}.$$

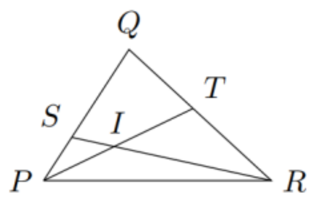


9. Un triangolo rettangolo ha il cateto maggiore di lunghezza doppia rispetto al cateto minore. Il vertice dell'angolo retto cade sul diametro di un semicerchio e i cateti formano angoli di 45° con il precedente diametro. Se gli estremi dell'ipotenusa appartengono alla semicirconferenza e il semicerchio ha raggio 5, qual è l'area del triangolo?

La **Soluzione** di questo esercizio è già contenuta nella Jamboard di supporto: l'idea-chiave è che possiamo facilmente caratterizzare il semicerchio che "avvolge" il triangolo con vertici in $(-3; 3), (0; 0), (6; 6)$ e poi riscalare il tutto per conformarci con le ipotesi del testo.

---

10. Nel triangolo PQR, i punti S e T appartengono, nell'ordine, ai lati PQ e QR. Detto I il punto d'intersezione dei segmenti RS e PT, le aree dei triangoli PIR, RIT e SIP misurano rispettivamente 3 mm^2, 5 mm^2 e 1 mm^2. Qual è l'area in mm^2 del triangolo PQR?



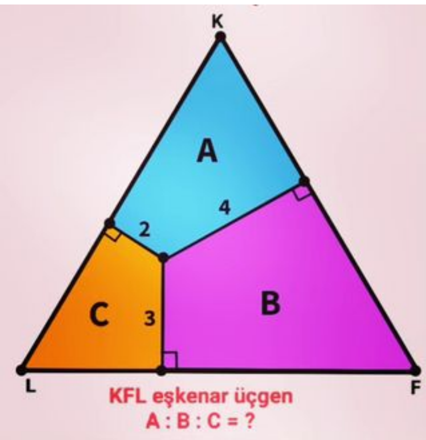
Soluzione inefficiente ma istruttiva: denominiamo $x = [QSIT]$ e tracciamo il segmento ST. Poiché $SPRT$ è un quadrilatero convesso con diagonali PT, RS si ha $[PRI][TSI] = [RTI][SPI]$, da cui $[SIT] = \frac{5}{3}$ e $[QST] = x - \frac{5}{3}$. D'altro canto i triangoli QST, QPR condividono l'angolo con vertice in Q, da cui

$$\frac{[QST]}{[QPR]} = \frac{QS \cdot QT}{QP \cdot QR} = \frac{QS}{QP} \cdot \frac{QT}{QR} = \frac{[QSR]}{[QPR]} \cdot \frac{[QTP]}{[QRP]} = \frac{x+5}{x+9} \cdot \frac{x+1}{x+9}.$$

Moltiplicando gli estremi per $[QPR] = (x + 9)$ e ricordando quanto detto in precedenza abbiamo

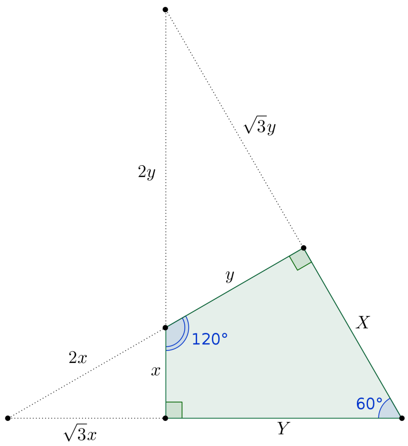
$$\left(x - \frac{5}{3}\right)(x + 9) = (x + 1)(x + 5),$$

equazione di primo grado con unica soluzione $x = 15$. Segue $[QPR] = 24$.



11. Abbiamo un triangolo equilatero e un punto interno che dista $2, 3, 4$ dai lati. Qual è la proporzione tra le aree delle regioni A, B, C raffigurate?

Soluzione. Può essere pratico risolvere una questione preliminare, che riguarda sia A che B che C: supponiamo di avere un quadrilatero dove due angoli opposti sono retti e i restanti sono di $60°$ e $120°$. Conoscendo le lunghezze dei lati dell'angolo di $120°$, com'è possibile trovare le lunghezze dei lati dell'angolo opposto?
Questo problema di supporto è facilmente risolto osservando che i prolungamenti dei lati determinano un po' di "squadrette", ossia triangoli con angoli di $30°, 60°, 90°$, simili al triangolo di lati $1, \sqrt{3}, 2$. Con riferimento all'illustrazione a lato abbiamo $X = \frac{2x+y}{\sqrt{3}}$ e $Y = \frac{2y+x}{\sqrt{3}}$, dunque l'area del quadrilatero in verde è data da



$$\frac{xY + Xy}{2} = \frac{x^2 + 4xy + y^2}{2\sqrt{3}}.$$

Da questo lemma segue $[A] : [B] : [C] = 52 : 73 : 37$.
Soluzione straordinariamente più efficiente: basta avviare Geogebra, utilizzare una griglia isometrica al posto dell'usuale griglia cartesiana e concludere per bruta conta di triangoli equilateri.

---

12. Tra 1 e 10^{20} vi sono più quadrati o più palindromi?
Soluzione. Nell'intervallo considerato vi sono chiaramente 10^{10} quadrati. Per contare i palindromi è conveniente classificarli in base al numero di cifre: contiamo ad esempio quanti sono i palindromi di 5 cifre e quelli di 6 cifre. Un palindromo di 5 cifre è identificato da due cose: la cifra centrale (10 possibilità) e le due cifre iniziali, che corrispondono ad un numero naturale tra 10 e 99 (90 possibilità). Un palindromo di 6 cifre è identificato unicamente dalle sue prime tre cifre, corrispondenti ad un numero naturale tra 100 e 999. In particolare vi sono 900 palindromi di 5 cifre ed altrettanti di 6 cifre. Più in generale possiamo esibire una biezione tra i palindromi di $2k + 1$ cifre e quelli di $2k + 2$ cifre per duplicazione o rimozione della cifra centrale. Segue che tra 1 e 10^{20} vi sono

$$(9 + 9) + (90 + 90) + (900 + 900) + \ldots + (9 \cdot 10^9 + 9 \cdot 10^9) = 18 \sum_{k=0}^{9} 10^k = 2(10^{10} - 1)$$

palindromi, appena meno del doppio dei quadrati, ma sullo stesso ordine di grandezza.
Folklore. Oltre a condividere aspetti delle rispettive distribuzioni, quadrati e palindromi condividono il fatto di essere *basi additive*, sebbene di ordine diverso. Lagrange ha dimostrato nel 1770 che ogni numero naturale può essere espresso come somma di al più 4 quadrati, ma la dimostrazione che ogni numero naturale è somma di al più 3 palindromi, dovuta a Cilleruelo, Luca e Baxter, è decisamente recente: ArXiV 2016.