SEM 2024 - Esercizi L9(C) - Soluzioni

Esercizio 1. Nel ballottaggio per l'elezione dell'imperatrice della galassia Antonietta Maria l'ha spuntata su Maria Antonietta, con 13 voti contro 7. Lo spoglio delle schede è avvenuto una scheda alla volta: con quale probabilità Antonietta Maria è rimasta in stretto vantaggio rispetto alla concorrente, dalla prima all'ultima scheda scrutinata?

Soluzione. La curiosa scelta dei nomi delle protagoniste suggerisce che la questione possa essere affrontata tramite qualche argomentazione di simmetria, ma è tutt'altro che evidente *quale* argomentazione di simmetria. Il problema è noto come *problema del ballottaggio di Bertrand*. Procediamo per piccoli passi:

- vogliamo determinare la probabilità che A risulti sempre in testa rispetto a M. Per passaggio al complementare, è sufficiente determinare la probabilità che non avvenga mai un pareggio;
- se il primo voto scrutinato è per M, visto l'esito finale è inevitabile che a un certo punto si verifichi un pareggio;
- se il primo voto scrutinato è per A e ad un certo punto si verifica un pareggio, invertendo quanto espresso nelle schede scrutinate fino al momento del pareggio torniamo nella situazione descritta nel punto precedente.

Questa considerazione di simmetria evidenzia che quanto cercato è *il complementare del doppio della probabilità che il primo voto sia per M*. Indicando con A e con M anche i voti ottenuti dalle singole candidate, è chiaro che la probabilità che il primo voto scrutinato sia per M è $\frac{M}{A+M}$. Segue che la risposta è fornita da

$$1 - \frac{2M}{A+M} = \frac{A-M}{A+M} = \frac{13-7}{13+7} = 30\%.$$

Nota: sfruttare questo lemma è uno dei modi più efficienti per contare i percorsi debolmente sottodiagonali in una griglia $n \times n$, dove ogni passo corrisponde ad uno spostamento unitario verso destra o verso l'alto. Tale numero di percorsi è l'n-esimo numero di Catalan, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Esercizio 2. Qual è un'espressione più concisa di $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2$ al variare di k in $\mathbb{N}$?
Hint: immaginate di volere assegnare una imprecisata quantità di medaglie di bronzo, una medaglia d'argento e una medaglia d'oro all'interno di un gruppo di n persone.

Soluzione. Notiamo preliminarmente che non è rilevante se la somma è effettuata su $k \in [0, n]$ o su $k \in [1, n]$, poiché l'addendo associato a $k = 0$ è nullo. Immaginiamo dunque di avere una comitiva di n persone e...

- fissare un $k \in [1, n]$
- scegliere k delle n persone e mettere al collo di ognuna di queste una medaglia di bronzo
- scegliere 1 delle k persone già premiate e premiarla ulteriormente con un argento
- scegliere nuovamente 1 delle k persone che hanno un bronzo e premiarla ulteriormente con un oro.

Non è difficile realizzare che $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2$ conta il numero di queste buffe premiazioni.
Ma non è neppure difficile realizzare che ci sono $n(n-1)2^{n-2}$ premiazioni in cui argento e oro sono assegnati a persone diverse, $n2^{n-1}$ premiazioni in cui argento e oro sono assegnati alla stessa persona.
Segue

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2 = (n(n-1)+2n)\,2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Più che legittima questione sollevata da C.Lonigro: *ma in assenza di grandi doti o esperienza esegetico-narrativa, come possiamo affrontare quesiti analoghi?* Con più tecnica. Prendendo come punto di partenza il binomio di Newton $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$, se trovassimo un operatore lineare che manda x^k in k^2 potremmo facilmente concludere applicandolo a $(1+x)^n$. Beh, la somma della derivata prima e seconda nel punto $x=1$ funziona, poiché $\frac{d^2}{dx^2}x^k + \frac{d}{dx}x^k = k^2x^k$. Pertanto

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2 = \left(\frac{d}{dx}+\frac{d^2}{dx^2}\right)(1+x)^n\bigg|_{x=1} = n(n-1)(1+x)^{n-2} + n(1+x)^{n-1}\big|_{x=1}.$$

Esercizio 3. Qual è il valore della seguente somma? $S = \sum_{n=0}^{2024} n(n+1)(n+3)$. **Hint**: HSI.

Soluzione. Per quanto visto a lezione è molto semplice sommare i valori che $p_k(n) = \binom{n}{k}$ assume su un intervallo. Poiché questi polinomi sono una base dello spazio dei polinomi (ne abbiamo esattamente uno per ogni possibile grado), lo stesso vale anche per

$$q(n) = n(n+1)(n+3) = n(n+1) + n(n+1)(n+2) = 2\binom{n+1}{2} + 6\binom{n+2}{3}.$$

In particolare

$$\sum_{n=0}^{2024} n(n+1)(n+3) = 2\sum_{n=0}^{2024}\binom{n+1}{2} + 6\sum_{n=0}^{2024}\binom{n+2}{3} = 2\binom{2026}{3} + 6\binom{2027}{4}.$$

Esercizio 4. Qual è il valore della seguente somma? **Hint**: differenze in avanti ripetute.

$$T = \sum_{k=0}^{2024}\binom{2024}{k}(-1)^k k^{2024}.$$

Soluzione. L'operatore δ di differenza in avanti è quello che manda un generico polinomio $p(x)$ in $p(x+1)-p(x)$. Possiamo osservare che δ^2 manda $p(x)$ in $p(x)-2p(x+1)+p(x+2)$, δ^3 manda $p(x)$ in $p(x)-3p(x+1)+3p(x+2)-p(x+3)$ e così via. Nel nostro caso specifico T è quanto si ottiene applicando δ^{2024} a $p(x)=x^{2024}$ e valutando il tutto in zero. Ricordiamo però che

- se $p(x)$ ha grado $d\geq 1$, allora $\delta p(x)$ ha grado $d-1$;
- nelle medesime ipotesi del punto precedente, se $p(x)$ ha monomio di testa $a_d x^d$, allora $\delta p(x)$ ha monomio di testa $d a_d x^{d-1}$. In termini equivalenti, relativamente ai monomi di testa gli operatori δ e $\frac{d}{dx}$ si comportano allo stesso modo.

Segue che T è il valore della derivata 2024-esima di x^{2024} nell'origine, ossia $2024!$.

Esercizio 5. Qual è il più piccolo numero naturale n per cui $\binom{2n}{n}$ risulta multiplo di $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$? **Fatto noto** potenzialmente utile: l'esponente della massima potenza di 2 che divide $\binom{2n}{n}$ è il numero di cifre 1 nella rappresentazione binaria di n.

Soluzione. Per il Teorema cinese è sufficiente imporre che $\binom{2n}{n}$ sia simultaneamente multiplo di 2^3, di 11 e di 23. Dato un numero primo p, definiamo l'*altezza p-adica* di n come il massimo k tale per cui $p^k \mid n$, e denotiamo tale quantità come $\nu_p(n)$. Pretendiamo in particolare che $\nu_2\left(\binom{2n}{n}\right) \geq 3$, $\nu_{11}\left(\binom{2n}{n}\right) \geq 1$ e $\nu_{23}\left(\binom{2n}{n}\right) \geq 1$. Per la teoria (Teorema di Legendre)

$$\nu_p(n!) = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

e poiché $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}$ abbiamo

$$\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor\right).$$

Addizionalmente, $f(\alpha) = \lfloor 2\alpha \rfloor - 2\lfloor \alpha \rfloor$ è una funzione 1-periodica che vale 0 se la parte frazionaria di α è minore di $\frac{1}{2}$ e 1 altrimenti. In particolare le pretese che abbiamo nei confronti di n possono essere traslitterate come

- nella scrittura binaria di n devono esserci almeno 3 cifre 1;
- nella scrittura in base 11 di n deve esserci almeno una cifra ≥ 6;
- nella scrittura in base 23 di n deve esserci almeno una cifra ≥ 12.

L'ultimo vincolo forza n ad essere almeno 12, ma $12 = 8 + 4$ non rispetta il primo vincolo. $13, 14, 15$ non rispettano il secondo vincolo. $16, 17, 18$ non rispettano il primo vincolo. Il più piccolo numero naturale che rispetta tutti e tre i vincoli è $n = 19$, e infatti $\binom{38}{19} = 2024 \cdot 17463075$.

Esercizio 6. Data la successione dei numeri di Lucas, definita da $L_0 = 2, L_1 = 2$ e $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si dimostri che

$$4^m L_{2m} \equiv 20m^2 - 10m + 2 \pmod{25}$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$. **Hint**: dall'interazione tra la formula di Binet e il binomio di Newton otteniamo che il membro sinistro è una particolare combinazione lineare di potenze di 5.

Soluzione. Questo è un esercizio decisamente impegnativo, in quanto richiede di coordinare ≥ 2 idee non banali. Sulla scia del suggerimento possiamo osservare che

$$4^m L_{2m} = (1+\sqrt{5})^{2m} + (1-\sqrt{5})^{2m} = \sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}\sqrt{5}^k\left(1^{2m-k} + (-1)^{2m-k}\right) = 2\sum_{j=0}^{m}\binom{2m}{2j}5^j.$$

Nella determinazione della classe di resto $\pmod{25}$ del termine destro, gli addendi associati a $j \geq 2$ non hanno rilevanza, in quanto corrispondenti a multipli di 25. Ne consegue

$$4^m L_{2m} \equiv 2\sum_{j=0}^{1}\binom{2m}{2j}5^j = 2\left(1 + 5m(2m-1)\right) \equiv 20m^2 - 10m + 2 \pmod{25}$$

come volevasi dimostrare.

Nota: questo ci permette di determinare le ultime due (o tre) cifre di un qualsiasi numero di Fibonacci o Lucas in poche operazioni. Infatti $L_{2m+1} = L_{2m+2} - L_{2m}$ e $F_n = \frac{1}{2}(L_n + 2L_{n-1})$, dunque è sufficiente saper calcolare L_{2m} modulo 25 o 125 (il periodo delle successioni modulo 4 o 8 è corto, per cui non pone particolari ostacoli tecnici). D'altra parte, per quanto appena scoperto, i termini di $\{L_{2m} \pmod{5^k}\}_{m\geq 0}$ corrispondono ai valori di un polinomio moltiplicato per un'opportuna potenza di 2.

A titolo di esempio, applichiamo quest'idea per determinare alla svelta $L_{666} \pmod{100}$. Per cominciare, da $6 \mid 666$ abbiamo $L_{666} \equiv 2 \pmod 4$. Dal lemma $2^{666}L_{666} \equiv 2 \pmod{25}$, e poiché $2^{10} \equiv -1 \pmod{25}$ si ha

$$L_{666} \equiv 2^{15} \equiv -2^5 \equiv -7 \equiv 18 \pmod{25}.$$

Segue che le ultime due cifre di L_{666} sono precisamente 18.