3I - Verifica 28/10/24 - Soluzioni

Esercizio 1. (8pt) $\{a_n\}_{n\geq 0}$ è una progressione aritmetica in cui $a_2 = 3$ e $a_5 = 7$. Quanto vale $a_0 + a_1$?

Soluzione. La ragione della progressione (cioè la pendenza del grafico) è necessariamente $\frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}$, dunque $a_1 = 3 - \frac{4}{3}$ e $a_0 = 3 - \frac{8}{3}$, che sommano a $6 - \frac{12}{3} = 2$.

Esercizio 2. (12pt) Si determini per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$|x| + |x-2| + (x-1)^2 \geq 8.$$

Soluzione. È immediato osservare che sia $|x| + |x-2|$ che $(x-1)^2$ hanno grafici simmetrici rispetto alla retta verticale di equazione $x = 1$. Sull'intervallo $[0, 2]$ non possono esserci soluzioni, in quanto su tale intervallo valgono $|x| + |x-2| = 2$ e $(x-1)^2 \leq 1$, da cui $|x| + |x-2| + (x-1)^2 \leq 3$. Inoltre $|x| + |x-2| + (x-1)^2$ è crescente sulla semiretta $[1, +\infty)$ e vale 8 nel punto $x = 3$. Per monotonia e simmetria la risposta è pertanto $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

Esercizio 3. (13pt) Supponiamo che gli eventi *nascere maschio* e *nascere femmina* siano complementari ed equiprobabili. Supponiamo inoltre che dal 2025 ad ogni coppia sia categoricamente impedito di avere altri figli una volta messo al mondo un maschio. Nell'arco di due secoli è ragionevole aspettarsi un sensibile aumento della percentuale femminile della popolazione? Si argomenti opportunamente.

Soluzione. Trascurando il caso di parti gemellari, impedire ad ogni coppia di avere più di un figlio maschio *non altera* sensibilmente la proporzione M:F nella popolazione. Supponendo infatti che ogni coppia continui a mettere al mondo individui finché non le è proibito dalla legge, con probabilità $\frac{1}{2}$ la prole è di tipo M, con probabilità $\frac{1}{4}$ è di tipo FM, con probabilità $\frac{1}{8}$ è di tipo FFM, con probabilità $\frac{1}{16}$ è di tipo $FFFM$ e così via. Il numero medio di figli maschi per coppia è dunque $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$, mentre il numero medio di figlie femmine per coppia è

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \ldots = \sum_{k\geq 1} \frac{k}{2^{k+1}} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{16} + \ldots\right) + \ldots$$

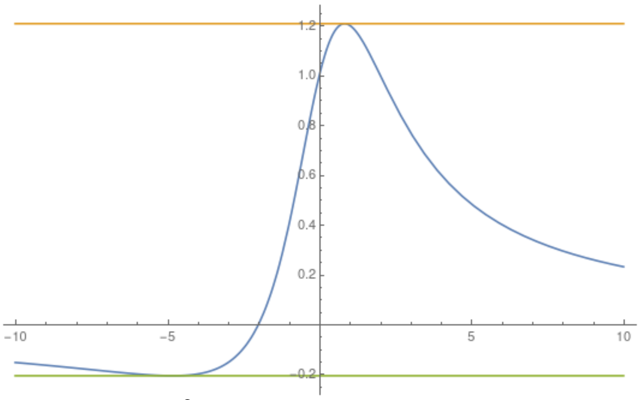
che *coincide con la precedente serie*, dunque vale 1. Anche indipendentemente da questo discorso quantitativo legato al comportamento della serie geometrica $\sum_{n\geq 1} r^n$ e della sua *derivata* $\sum_{n\geq 1} nr^{n-1}$, ogni individuo al momento della nascita è equiprobabilmente maschio o femmina, e qualunque obbligo di legge che riguarda i genitori non altera questo status a priori.

Esercizio 4. (15pt) Delle funzioni di seguito elencate si determini il dominio massimale e si indichi se queste sono o non sono *pari*, *dispari*, *monotone*, *iniettive*, *convesse*.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \qquad g(x) = \sqrt{x} + \sin(\sqrt{x}), \qquad h(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}.$$

Soluzione. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ è una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$, pari (dunque non monotona e neppure iniettiva) e convessa, il cui grafico è dato dal ramo superiore di una iperbole equilatera. La funzione $x + \sin x$ è crescente, ad esempio poiché la sua derivata è $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} \geq 0$. Segue che $g(x) = \sqrt{x} + \sin(\sqrt{x})$ è una funzione crescente, dunque iniettiva, con dominio dato dalle x non negative. $g(x)$ non è né pari né dispari, in quanto ha dominio asimmetrico rispetto all'origine. Inoltre $g(x)$ non è convessa in quanto ha un insieme discreto di punti stazionari, e in particolare infiniti flessi. $h(x)$ ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ e su tale insieme coincide con il polinomio $x^3 + x^2 + x + 1$, che è una cubica crescente e dunque iniettiva. Dal flesso in $x = -\frac{1}{3}$ si ha che $h(x)$ non è convessa, e banalmente $h(x)$ non è né pari né dispari.

Esercizio 5. (18pt) Si tracci un grafico qualitativo di $f(x) = \frac{2x+4}{x^2+4}$ e si determini dove cadono (se esistono) i punti di massimo e minimo.



Soluzione. Il dominio di $f(x)$ è tutto $\mathbb{R}$ e per qualsiasi $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'equazione $f(x) = k$ è equivalente ad una equazione di secondo grado, che ammette soluzioni reali se e solo se $4k^2 - 4k - 1 \geq 0$. Segue che il grafico di f interseca qualsiasi retta orizzontale in al più due punti (per Ruffini) e che l'immagine di f è l'intervallo $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$, delimitato dai valori di minimo e massimo. In prossimità dell'origine si ha $f(x) \approx \frac{x}{2}+1$, mentre per x molto lontane dall'origine si ha $f(x) \approx \frac{2}{x}$. L'aspetto del grafico è dunque quello riportato in figura, dove l'unico punto di intersezione con l'asse delle ascisse cade in $x = -2$. Le ascisse del punto di minimo assoluto e di quello di massimo assoluto possono essere ottenute risolvendo $f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ oppure $\frac{d}{dx} f(x) = 0$: in ogni caso queste coincidono con le soluzioni di $x^2 + 4x = 4$, ossia $x = 2(-1 \pm \sqrt{2})$.

Esercizio 6. (21pt) Tramite il principio di induzione si dimostri che per ogni $N \geq 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{4N+2} - \sqrt{6} + 1.$$

Soluzione. La disuguaglianza è banalmente verificata nel caso $N = 1$: per provarla in generale è dunque sufficiente dimostrare che per ogni $N \geq 1$ si ha

$$\sqrt{4N+2} - \sqrt{6} + 1 + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \leq \sqrt{4N+6} - \sqrt{6} + 1,$$

il che è equivalente a provare

$$\sqrt{4N+6} - \sqrt{4N+2} \geq \frac{1}{\sqrt{N+1}}$$

oppure

$$\frac{4}{\sqrt{4N+6} + \sqrt{4N+2}} \geq \frac{1}{\sqrt{N+1}}$$

oppure

$$\sqrt{4N+6} + \sqrt{4N+2} \leq 4\sqrt{N+1}$$

oppure (posto $M = N + 1$)

$$\sqrt{4M+2} + \sqrt{4M-2} \leq 4\sqrt{M}$$

che è di immediata dimostrazione: segue ad esempio dalla disuguaglianza tra media aritmetica e media quadratica (AM-QM) $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, o dalla concavità della radice quadrata, o anche soltanto da ripetuti elevamenti al quadrato.