

# Classi prime - Verifica Ottobre 24 - Soluzioni

---

**Esercizio 1.** (8pt) Si determini il massimo comun divisore tra 123456789 e  $10^8$ .

**Soluzione.** Abbiamo  $10^8 = 2^8 \cdot 5^8$  e 123456789 termina con la cifra 9, pertanto non è multiplo né di 2 né di 5. Segue che le quantità menzionate sono *coprime*, ossia hanno massimo comun divisore 1.

---

**Esercizio 2.** (13pt) A ottobre il prezzo di un tablet è di 800 euro. Dato che nessuno acquista il tablet, a inizio novembre il rivenditore decide di applicare uno sconto del 20% sul prezzo iniziale. A inizio dicembre il tablet è ancora invenduto, dunque il rivenditore applica un nuovo sconto sul prezzo di novembre. Sapendo che il tablet viene venduto a fine dicembre ad un prezzo che è il 60% di quello iniziale, qual è stato lo sconto applicato dal rivenditore a inizio dicembre?

**Soluzione.** Applicare uno sconto significa moltiplicare un prezzo per una fissata costante (compresa tra zero e uno). Indipendentemente dal prezzo iniziale, la costante  $x$  coinvolta nello sconto incognito deve essere tale per cui  $0.8x = 0.6$ . Segue  $x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ , dunque lo sconto applicato dal rivenditore a inizio dicembre è del 25%.

---

**Esercizio 3.** (15pt) Si determini il resto di  $10^{12}$  nella divisione per 31.

**Soluzione.** Utilizzando la notazione delle congruenze abbiamo  $10^2 \equiv 7 \pmod{31}$   
e  $10^3 \equiv 70 \equiv 8 \pmod{31}$ . Dall'ultima relazione segue  $10^6 \equiv 8^2 \equiv 2 \pmod{31}$   
e infine  $10^{12} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{31}$ . In alternativa (non troppo pratica) dalla divisione esplicita abbiamo

$$10000000000 = 31 \cdot 32258064516 + 4.$$

---

**Esercizio 4.** (17pt) Si dimostri che 349 è un numero primo.

**Soluzione.** Poiché  $18^2 = 324 < 349 < 361 = 19^2$  abbiamo che  $\sqrt{349}$  è compresa tra 18 e 19. Per quanto visto in classe è sufficiente dimostrare che 349 non è multiplo di alcun elemento di  $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ . Poiché 349 precede  $350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$  è ovvio che 349 non sia multiplo né di 2, né di 5, né di 7. Inoltre  $349 \equiv 3 + 4 + 9 \equiv 1 \pmod{3}$  e  $349 \equiv 3 - 4 + 9 \equiv 8 \pmod{11}$ . Infine

$$\gcd(349, 17 \cdot 19) = \gcd(349, 323) = \gcd(26, 323) = \gcd(2 \cdot 13, 17 \cdot 19) = 1$$

conclude la dimostrazione della primalità del 349.

---

**Esercizio 5.** (20pt) Quanti numeri naturali tra 1 e 2024 (estremi inclusi) non sono multipli né di 2, né di 3, né di 5?

**Soluzione.** Possiamo osservare che in ogni intervallo di lunghezza  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$  abbiamo esattamente 8 elementi che risultano dispari, non multipli di 3 e non multipli di 5: precisamente gli elementi che coprono le classi di resto 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 (mod 30). In particolare tra 1 e  $30 \cdot 67 = 2010$  vi sono  $8 \cdot 67 = 536$  numeri con le caratteristiche volute. Tenendo conto anche di 2011, 2017, 2021 e 2023 abbiamo

---

un totale di 540 numeri naturali con le caratteristiche volute.

In alternativa è possibile applicare il principio di inclusione-esclusione: consideriamo come insieme-universo quello dei numeri naturali tra 1 e 2024, e indichiamo con  $A$  l'insieme dei numeri pari, con  $B$  l'insieme dei multipli di 3 e con  $C$  l'insieme dei multipli di 5.  $A$  ha 1012 elementi (da  $2 \cdot 1$  a  $2 \cdot 1012$ ),  $B$  ha 674 elementi e  $C$  ha 404 elementi.  $A \cap B$ ,  $A \cap C$  e  $B \cap C$  sono rispettivamente gli insiemi dei multipli di 6, di 10 e di 15, con  $|A \cap B| = 337$ ,  $|A \cap C| = 202$  e  $|B \cap C| = 134$ .  $A \cap B \cap C$  è l'insieme dei multipli di 30, con 67 elementi. Segue

$$|A \cup B \cup C| = 1012 + 674 + 404 - 337 - 202 - 134 + 67 = 1484,$$

da cui  $|\overline{A \cup B \cup C}| = 2024 - 1484 = 540$ .

---

**Esercizio 6.** (24pt) Delle quantità di seguito riportate come frazioni si determini la rappresentazione decimale. Viceversa, delle quantità riportate come scritture decimali si determini la frazione associata, ridotta ai minimi termini.

$$A = \frac{1}{81}, \quad B = \frac{81}{7}, \quad C = \frac{4}{15}, \quad D = 0.\overline{074}, \quad E = 0.1\overline{357}, \quad F = 0.3\overline{7}.$$

**Soluzione.** Dalla divisione esplicita abbiamo

$$A = \frac{1}{81} = 0.\overline{012345679}, \quad B = \frac{81}{7} = 11.\overline{571428}, \quad C = \frac{4}{15} = 0.2\overline{6}.$$

Per le conversioni nell'altra direzione è sufficiente ricordare che  $1 = 0.\overline{9}$ , da cui

$$D = 0.\overline{074} = \frac{74}{999} = \frac{2}{27}, \quad E = 0.1\overline{357} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{357}{999} = \frac{226}{1665}, \quad F = 0.3\overline{7} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{17}{45}.$$

---