3I - Verifica 02/12/24 - Soluzioni

Esercizio 1. (6$\diamondsuit$) Una parabola ha fuoco in $F(2;4)$ e direttrice coincidente con l'asse delle ascisse. Di quale polinomio di secondo grado è grafico?

Soluzione. Detto $p(x) = ax^2 + bx + c$ il polinomio in questione, a è certamente positivo poiché il fuoco giace al di sopra della direttrice. Il vertice cade necessariamente in $V(2;2)$ e si ha $a = \frac{1}{4\cdot FV} = \frac{1}{8}$, dunque il polinomio voluto è

$$p(x) = 2 + \frac{1}{8}(x-2)^2 = \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} + \frac{5}{2}.$$

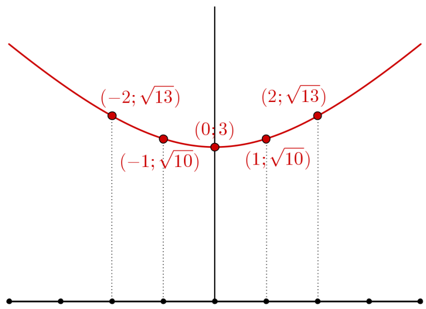
Esercizio 2. (7$\diamondsuit$) Dove si trovano fuoco e vertice della parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$?

Soluzione. Per completamento del quadrato abbiamo

$$y = \frac{1}{4}(x^2 + 8x - 12) = \frac{1}{4}\left((x+4)^2 - 28\right) = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 7$$

dunque il vertice cade in $V(-4;-7)$. Poiché $a > 0$ e $FV = \frac{1}{4a} = 1$, il fuoco cade in $F(-4;-6)$.

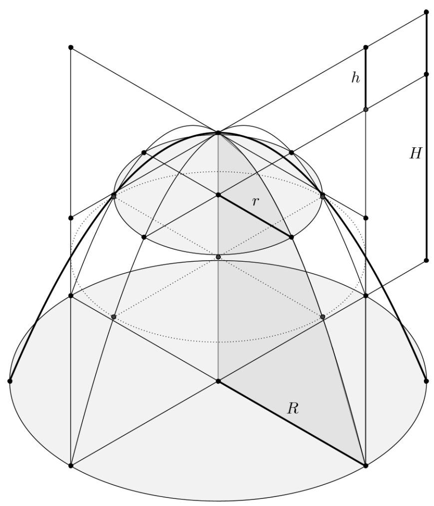
Esercizio 3. (9$\diamondsuit$) Si dimostri che la curva rappresentata accanto, passante dai punti $(0;3), (\pm 1, \sqrt{10})$ e $(\pm 2;\sqrt{13})$, **non** è un arco di parabola.



Soluzione. Se la curva in figura fosse un arco di parabola questa dovrebbe avere vertice in $V(0;3)$ e dunque equazione $y = 3 + ax^2$ per qualche $a > 0$. Il passaggio da $(1;\sqrt{10})$ comporta $a = \sqrt{10} - 3$ mentre il passaggio da $(2;\sqrt{13})$ comporta $a = \frac{\sqrt{13}-3}{4}$, che è un'apertura diversa dalla precedente.

Alternativa #1: è abbastanza immediato osservare che tutti i punti in figura fanno parte del grafico di $y = \sqrt{9 + x^2}$, che è il ramo superiore di una iperbole equilatera. Questo conclude poiché da 5 punti distinti non può passare più di una conica.

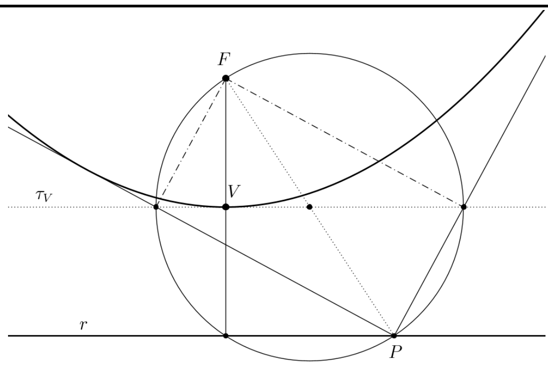
Alternativa #2: se i punti in figura appartenessero al grafico di un polinomio $p(x)$ di secondo grado, $(\delta p)(x) = p(x+1) - p(x)$ dovrebbe essere un polinomio di primo grado, dunque le pendenze delle rette secanti da un punto al successivo dovrebbero costituire una progressione aritmetica. Questo tuttavia non accade.



Esercizio 4. (10$\diamondsuit$) A partire da un segmento parabolico con corda orizzontale, un paraboloide viene generato dalla rotazione del segmento parabolico attorno al suo asse. Si dimostri che detta B l'area del cerchio di base ($B = \pi R^2$) e detta H l'altezza del segmento parabolico, il volume V del paraboloide è semplicemente espresso da $V = \frac{1}{2}BH$. *Suggerimento*: detto r il raggio della sezione a distanza h dal vertice, una volta provato che πr^2 è un polinomio di grado ≤ 3 della variabile h, per il principio di Cavalieri e la formula di Simpson siamo nelle condizioni di poter determinare il volume usando soltanto H e le aree di tre specifiche sezioni.

Soluzione. Per quella che è l'equazione di una parabola con vertice nell'origine e asse orizzontale, il raggio della sezione circolare a distanza h dal vertice è direttamente proporzionale a $\sqrt{h}$, dunque è esplicitamente $R\sqrt{\frac{h}{H}}$. L'area della sezione generica è dunque $\pi R^2 \frac{h}{H}$ e per il principio di Cavalieri il volume del paraboloide coincide con l'area di un triangolo avente base H e altezza πR^2: ciò prova immediatamente la tesi senza neppure far ricorso alla formula di Simpson.

Esercizio 5. ($12\diamondsuit$) Traendo eventualmente ispirazione dal diagramma a lato, si dimostri che se P appartiene alla direttrice di una parabola, le tangenti condotte da P alla parabola sono necessariamente perpendicolari tra loro. *Memento*: la tangente nel vertice è anche la collezione delle proiezioni del fuoco sulle tangenti.

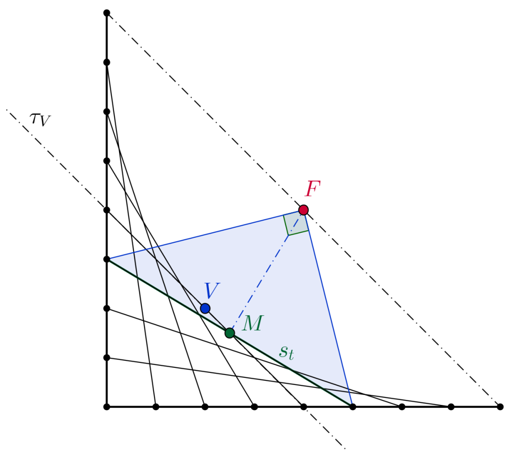


Soluzione. Per il Lemma suggerito dal testo, le proiezioni del fuoco sulle tangenti uscenti da P sono le intersezioni tra la tangente nel vertice τ_V e la circonferenza di diametro FP. Sempre per il Teorema di Talete (ma stavolta quello della nomenclatura italiana e non anglosassone) la circonferenza di diametro FP ha centro precisamente su τ_V, dunque l'angolo tra le tangenti sottende un diametro della circonferenza, e pertanto è retto. **Nota**: mediante *angle chasing* e proprietà ottica della parabola si può inoltre dimostrare che il segmento determinato dai punti di tangenza passa da F ed è ortogonale a FP.

Esercizio 6. ($14\diamondsuit$) s_t è definito come il segmento avente estremi in $(0; t)$ e $(8-t; 0)$.
Si dimostri che esiste un arco di parabola che risulta tangente a s_t per ogni $t \in [0, 8]$.
Suggerimenti:

- Se la tesi è vera, F, V e τ_V hanno collocazioni obbligate
- Come già ricordato, le proiezioni del fuoco sulle tangenti determinano qualcosa di ben noto
- Basta dunque controllare dove cade la proiezione di F su s_t al variare di t tra 0 e 8.

Soluzione. Seguendo i suggerimenti abbiamo che se gli s_t inviluppano una parabola, questa ha necessariamente fuoco in $F(4; 4)$, vertice in $V(2; 2)$ e tangente nel vertice di equazione $x + y = 4$. Per il Lemma invocato anche nell'esercizio precedente è dunque sufficiente provare che la proiezione di F su s_t ha somma delle coordinate pari a 4.
È semplice osservare (ad esempio dalle pendenze dei cateti) che il triangolo formato da F e dagli estremi di s_t è sempre sia rettangolo che isoscele: detto M il punto medio di s_t, segue immediatamente $s_t \perp FM$. Inoltre è chiaro che la somma delle coordinate di M sia 4, poiché questa è anche metà della somma delle coordinate degli estremi.



Avendo dimostrato che la proiezione di F su s_t cade sempre su τ_V la dimostrazione è conclusa.

Alternativa algebrica più sistematica. Consideriamo quanto accade mettendo a sistema le equazioni di s_a e s_b, ossia $ax + (8-a)y = a(8-a)$ e $bx + (8-b)y = b(8-b)$. Da Cramer abbiamo che il punto di intersezione ha ascissa $\frac{(8-a)(8-b)}{8}$ e ordinata $\frac{ab}{8}$. Considerando il caso-limite $a = b = t$ abbiamo che l'inviluppo tange s_t nel punto di coordinate $\left(\frac{(8-t)^2}{8}; \frac{t^2}{8}\right)$, ossia lungo la curva di equazione $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{8}$. Considerando una rotazione di 45° del sistema di riferimento, indotta da $Y = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, X = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, abbiamo che l'equazione della precedente curva diviene $Y = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{16}X^2$, provando la tesi.