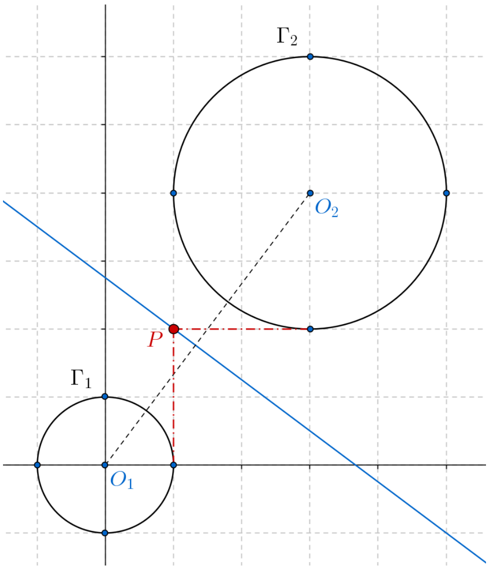
3I - Verifica 20/01/25 - Soluzioni

Esercizio 1. (9◇) Si determini l'equazione della circonferenza di centro $(4;5)$ e raggio 10.
Si determinino poi centro e raggio della circonferenza di equazione $x^2+y^2-6x+8y=100$.

Soluzione. Per il primo punto è sufficiente semplificare $(x-4)^2+(y-5)^2=100$, che conduce a $x^2+y^2-8x-10y-59=0$. Per il secondo punto è sufficiente completare i quadrati: $(x-3)^2+(y+4)^2=125$ è l'equazione di una circonferenza di centro $(3;-4)$ e raggio $5\sqrt{5}$.

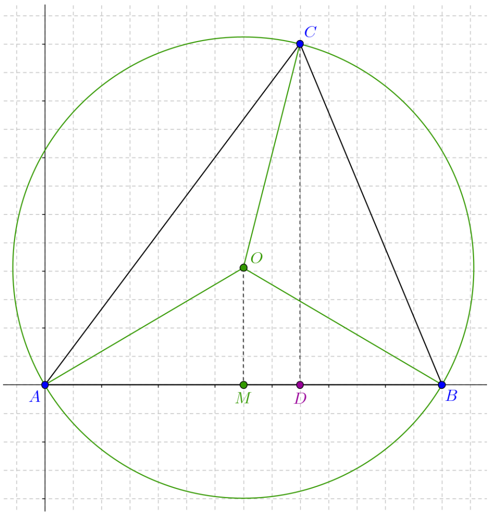
Esercizio 2. (10◇) Si determini l'equazione della tangente in $P(4;5)$ alla circonferenza Γ di equazione $x^2+y^2=2x+2y+23$.

Soluzione. È certamente possibile venire a capo della questione mediante discriminanti o applicando la formula di sdoppiamento, ma forse è più immediato osservare che abbiamo a che fare con la circonferenza centrata in $(1;1)$ di raggio 5, che passa da ben 12 punti a coordinate intere. In particolare è evidente che il raggio CP abbia pendenza $\frac{4}{3}$, dunque la retta cercata sia l'unica di pendenza $-\frac{3}{4}$ che passa da P, di equazione $y=-\frac{3}{4}x+8$, equivalente a $3x+4y=32$.



Esercizio 3. (12◇) L'*asse radicale* di due circonferenze $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ è il luogo dei punti P per cui P ha la stessa *potenza* rispetto a Γ_1 e Γ_2. Per la teoria è una retta ortogonale alla congiungente dei centri O_1O_2. Si determini l'equazione dell'asse radicale della circonferenza trigonometrica (centrata nell'origine e con raggio 1) e della circonferenza centrata in $(3;4)$ avente raggio 2.

Soluzione. Una prima strategia consiste nell'osservare che, per i Teoremi di Pitagora e della secante-tangente, x^2+y^2-1 è la potenza di un generico punto $(x;y)$ rispetto a Γ_1 e $x^2+y^2-6x-8y+21$ è la potenza del medesimo punto rispetto a Γ_2. Uguagliando le due espressioni si ottiene che l'equazione dell'asse radicale è $3x+4y=11$. In alternativa si può osservare che le tangenti condotte da $P(1;2)$ hanno la stessa lunghezza. Poiché O_1O_2 ha pendenza $\frac{4}{3}$, l'asse radicale è l'unica retta da $(1;2)$ con pendenza $-\frac{3}{4}$. Chiaramente $y=-\frac{3}{4}(x-1)+2$ conduce alla conclusione già trovata.



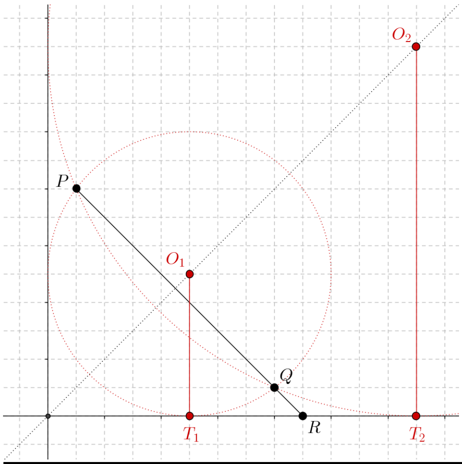
Esercizio 4. (13◇) Si determinino il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo avente vertici in $A(0;0), B(14;0), C(9;12)$ e le coordinate del circocentro, preferibilmente senza determinare le equazioni degli assi.

Soluzione. Definito D come il piede dell'altezza uscente da C, possiamo cominciare con l'osservare che per il Teorema di Pitagora il triangolo ABC ha lati ed area interi: $a=13$, $b=15, c=14, \Delta=84$. Dalla relazione di Eulero $abc=4R\Delta$ possiamo dunque dedurre immediatamente che $R=\frac{65}{8}$.
Detto M il punto medio di AB abbiamo $AM=7$,
e dal Teorema di Pitagora possiamo dedurre $OM=\frac{33}{8}$.

La circonferenza circoscritta ad ABC è pertanto l'unica di centro $\left(7; \frac{33}{8}\right)$ che passa dall'origine. Segue che la sua equazione è $x^2 + y^2 - 14x - \frac{33}{4}y = 0$.

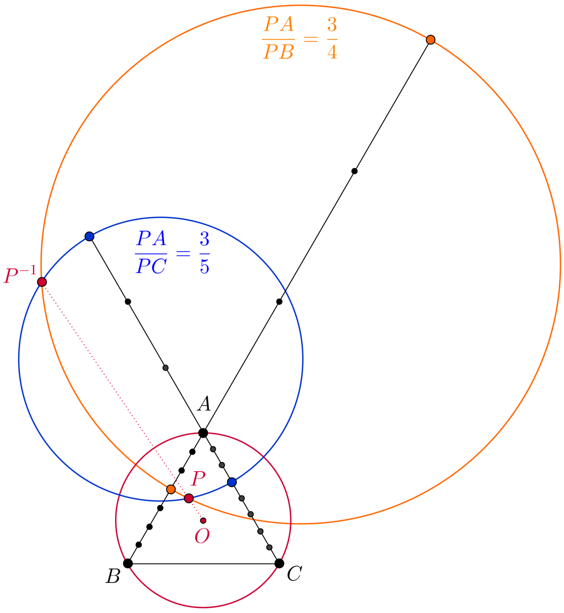
Esercizio 5. (15◇) Si determinino le equazioni delle due circonferenze che risultano tangenti agli assi cartesiani e passanti dal punto di coordinate $(8; 1)$.

Soluzione. Una soluzione analitica può essere implementata osservando che tutte le circonferenze tangenti agli assi e passanti da un punto del primo quadrante hanno equazione della forma $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ per qualche $a \geq 0$. Imponendo il passaggio da $(8; 1)$ si ottiene l'equazione di secondo grado $(8 - a)^2 + (1 - a)^2 = a^2$, che è risolta da $a = 5$ e $a = 13$. Segue che le equazioni cercate sono $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ e $x^2 + y^2 - 26x - 26y + 169 = 0$.



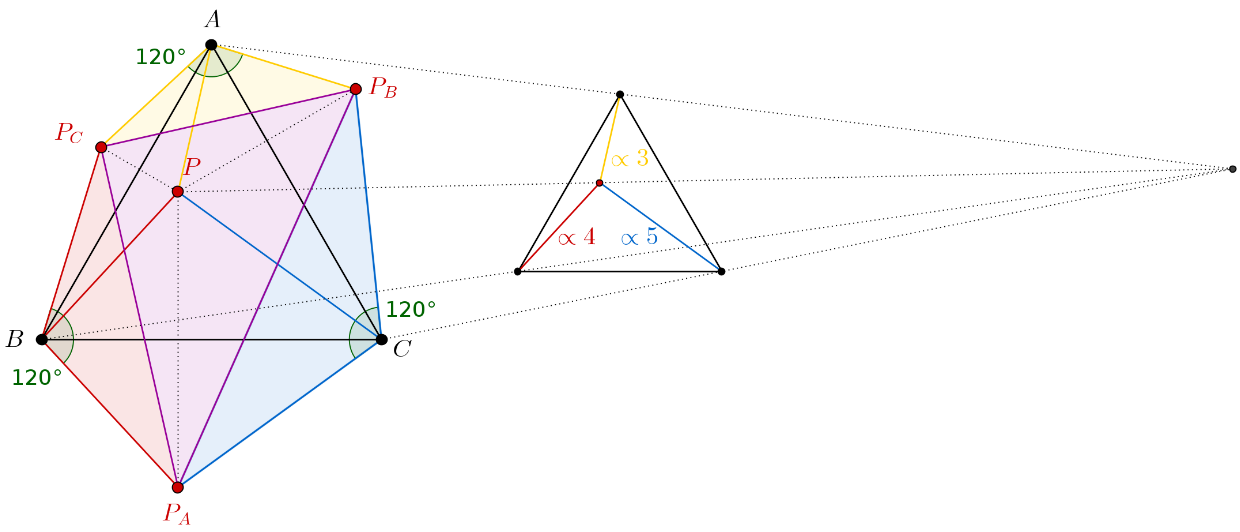
D'altro canto questo è pur sempre il quarto problema di Apollonio, che ammette una semplice soluzione sintetica. Oltre che da $P(8; 1)$, per simmetria le soluzioni devono necessariamente passare anche da $Q(1; 8)$. La retta PQ interseca l'asse delle ascisse in $R(9; 0)$, ed è palese che $RP \cdot RQ = 16$. Quest'ultima è la potenza di R rispetto ad una qualsiasi soluzione, il che comporta che lungo l'asse delle ascisse i punti di tangenza delle soluzioni distino 4 da R. Questo fissa le posizioni dei punti di tangenza e di conseguenza anche le posizioni dei centri lungo la retta $y = x$, rispettivamente in $O_1(5; 5)$ e $O_2(13; 13)$.

Esercizio 6. (20◇) Dato un triangolo equilatero ABC, si illustri una procedura che con riga e compasso permetta di determinare un punto P interno al triangolo con la proprietà che la terna di distanze $(PA; PB; PC)$ sia direttamente proporzionale alla terna $(3; 4; 5)$.



Soluzione. Possiamo rammentare che il luogo dei punti P del piano per cui $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{4}$ è una circonferenza (*di Apollonio*) con centro lungo la retta AB. Intersecando la circonferenza che realizza $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{4}$ con quella che realizza $\frac{PA}{PC} = \frac{3}{5}$ si ottengono due punti, che per transitività delle uguaglianze appartengono automaticamente alla circonferenza che realizza $\frac{PB}{PC} = \frac{4}{5}$. Per costruire con riga e compasso una circonferenza di Apollonio è sufficiente costruirne un diametro, e questo è equivalente a suddividere un dato segmento in un numero prefissato di parti congruenti, certamente possibile sfruttando il Teorema di Talete.

Anche se l'esercizio non richiedeva di giustificare quanto segue, delle due soluzioni individuate da questa procedura è evidente che solo una sia interna al triangolo di partenza: l'altra è l'inversa circolare della prima rispetto alla circonferenza circoscritta ad ABC, poiché quest'ultima, in virtù del Teorema della bisettrice, è ortogonale ad entrambe le circonferenze di Apollonio tracciate.



È anche possibile venire a capo del problema quasi *senza* tracciare circonferenze.
Immaginiamo di conoscere già dove cada P: se chiamiamo P_A, P_B, P_C i simmetrici del punto P rispetto ai lati di ABC, nell'esagono $AP_CBP_ACP_B$ gli angoli in A, B, C sono tutti di 120°, e i lati che escono da A, B o C hanno una lunghezza che coincide con la distanza del vertice considerato da P.
In qualsiasi triangolo isoscele con un angolo al vertice di 120° il lato più lungo è $\sqrt{3}$ volte il più corto, dunque il triangolo $P_AP_BP_C$ ha come terna di lunghezze dei lati qualcosa di proporzionale a $(3; 4; 5)$.
Dal Teorema di Pitagora (inverso) segue che $P_AP_BP_C$ è simile al "canonico" triangolo rettangolo.
Questo ci permette di procedere come segue:

1. Costruiamo un triangolo rettangolo $P_AP_BP_C$ con lati proporzionali alla terna pitagorica canonica;

2. Sui lati del nostro triangolo rettangolo costruiamo esternamente triangoli isosceli e con angolo al vertice di 120° (equivalentemente, consideriamo i centri dei triangoli equilateri costruiti esternamente sui lati);

3. I vertici A, B, C appena costruiti saranno quelli di un triangolo equilatero (Teorema di Napoleone). Detto P il simmetrico di P_A rispetto a BC, questo è anche il simmetrico di P_B rispetto ad AC o il simmetrico di P_C rispetto ad AB, e si ha $(PA; PB; PC) \propto (3; 4; 5)$;

4. A questo punto non è detto che la lunghezza di AB coincida con quella del triangolo equilatero che dà origine al problema, ma a meno di opportune rotazioni e omotetie un qualsiasi triangolo equilatero è riconducibile a un qualsiasi altro, fornendoci dunque una soluzione costruibile con riga e compasso. Equivalentemente possiamo guardare dove cadono le proiezioni di P sui lati di ABC e riportare le stesse proporzioni sui lati del triangolo equilatero originale, ricavando la posizione della soluzione da quelle dei vertici del suo triangolo pedale.

Più in generale i due approcci descritti illustrano come sia possibile, con riga e compasso, localizzare un punto interno di un triangolo date le sue *coordinate tripolari*, ossia la terna di distanze dai vertici a meno di moltiplicazione per scalari non nulli. Fisicamente/geograficamente questo è il problema della *triangolazione* di un segnale o di una posizione.