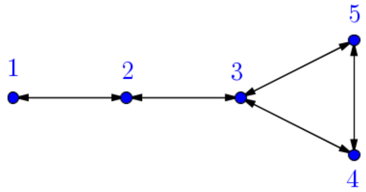
Classi 1^e - Verifica 12/24 - Soluzioni

Esercizio 1. (10♢) La tabella accanto rappresenta in forma cartesiana una relazione su $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dalla tabella si stabilisca se la relazione è riflessiva, se è simmetrica e se è transitiva.

	1	2	3	4	5
1	X	X			
2	X	X	X		
3		X	X	X	X
4			X	X	X
5			X	X	X

Soluzione. Ogni elemento di A è in relazione con se stesso e la tabella riportata è simmetrica rispetto alla diagonale principale, ragion per cui la relazione è sia riflessiva che simmetrica. Escludendo i cappi che collegano ogni elemento con se stesso, il grafo della relazione è così fatto:



La relazione non è transitiva in quanto, ad esempio, 1 è in relazione con 2 e 2 è in relazione con 3, ma 1 non è in relazione con 3.

Esercizio 2. (13♢) Si compilino le tavole di verità delle seguenti proposizioni (ricordo che $\wedge$ = AND, $\vee$ = OR, $\overline{C}$ = NOT C):

$$(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B), \qquad (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}).$$

Soluzione. Consideriamo la prima preposizione, $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B)$. Se B è vera sono veri entrambi i termini che vengono congiunti, dunque è vera la proposizione nel complesso. Se B è falsa la proposizione è equivalente a $A \wedge \overline{A}$, che è certamente falsa. In particolare $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) = B$.
Consideriamo ora la seconda preposizione, $(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$. Se A è vera, indipendentemente dal valore di verità di B esattamente una tra $A \wedge B$ e $A \wedge \overline{B}$ è vera, dunque è vera la proposizione nel complesso. Se A è falsa sono false sia $A \wedge B$ che $A \wedge \overline{B}$. Di conseguenza $(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A$.

Esercizio 3. (14♢) Sui lati di un triangolo rettangolo, esternamente al triangolo, sono costruiti dei triangoli equilateri. Si dimostri che l'area del triangolo equilatero costruito sull'ipotenusa è la somma delle aree dei triangoli equilateri costruiti sui cateti.

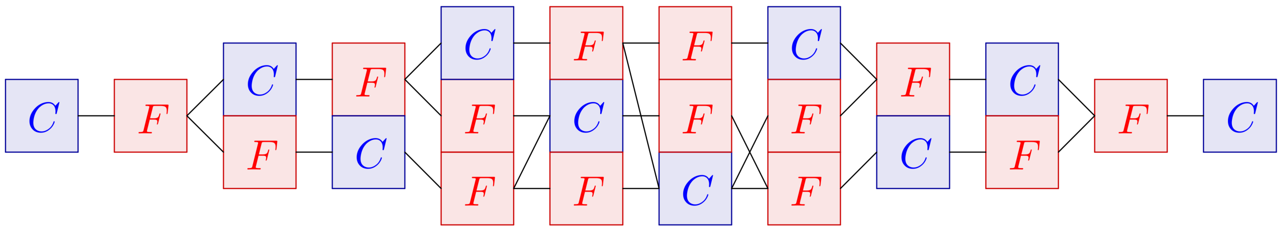
Soluzione. Quanto richiesto è una immediata conseguenza del Teorema di Pitagora e del principio di scala: l'area di un triangolo equilatero (analogamente, l'area di un n-agono regolare) dipende unicamente dalla lunghezza del lato e, viste le unità di misura, l'area deve essere direttamente proporzionale al quadrato del lato. Non è rilevante quale sia la costante di proporzionalità (nel caso del triangolo equilatero, $\mathcal{A} = \kappa\ell^2$ con $\kappa = \frac{1}{4}\sqrt{3} \approx 0.433$): $c^2 = a^2 + b^2$ comporta $\kappa c^2 = \kappa a^2 + \kappa b^2$.

Esercizio 4. (17♢) Jack ha una sveglia "vecchio stile", che squilla puntualmente alle 06 : 50 del mattino. Qual è l'ampiezza in gradi dell'angolo tra la lancetta delle ore e quella dei minuti al suono della sveglia?

Soluzione. Alle 06 : 50 la lancetta dei minuti punta in direzione del numero 10 riportato sul quadrante, mentre la lancetta delle ore si trova a $\frac{5}{6}$ della strada tra il 6 e il 7 riportati sul quadrante. Tra numeri successivi sul quadrante vi è un intervallo di ampiezza $\frac{360°}{12} = 30°$, dunque la lancetta delle ore precede l'etichetta 7 di 5° mentre la lancetta dei minuti si trova 90° dopo l'etichetta 7. L'angolo richiesto è dunque di 95°.

Esercizio 5. (20♢) Nel paese di SeFosseCosìSarebbeFacile ogni persona o è un cavaliere (C), che dice sempre la verità, o è un furfante (F), che dice sempre il falso. Undici SeFoCoSaFasesi siedono attorno ad un'ampia tavola rotonda, e ad un certo punto ognuno di loro pronuncia la frase "*sia alla mia destra che alla mia sinistra siede un furfante*". Quanti possono essere, al massimo e al minimo, i cavalieri seduti attorno alla tavola rotonda?

Soluzione. Cominciamo con l'osservare che deve esserci almeno un cavaliere, perché in caso contrario avremmo undici furfanti che dicono il vero, contrariamente alla loro natura. Ogni cavaliere presente a tavola dice il vero, dunque il suo posto è effettivamente compreso tra quelli di due furfanti (FCF). Questo comporta che il numero di cavalieri attorno alla tavola sia ≤ 5: se avessimo 6 o più cavalieri, almeno due di questi finirebbero con l'essere affiancati. La configurazione $FCFCFCFCFCF$ (dove il primo posto è anche accanto all'ultimo) rispetta tutti i vincoli, dunque il massimo numero di cavalieri è effettivamente 5. Viceversa, minimizzare il numero di cavalieri è equivalente a massimizzare il numero di furfanti. Tuttavia non possiamo avere più di due furfanti consecutivi, dunque tra un cavaliere e il successivo (in senso orario o antiorario) si trovano almeno uno e al più due furfanti, e il minimo numero di cavalieri è quello che si presenta in $CFFCFFCFFCF$ o configurazioni equivalenti, ossia 4.
Possiamo rappresentare tutte le configurazioni ammissibili attraverso una sorta di tracciato ferroviario, dove la postazione più a sinistra coincide con quella più a destra:



Esercizio 6. (24♢) Nel paese di SeFosseCosìSarebbeUnIncubo non esistono monete, esistono solo banconote da 17 SeFoCosi o 19 SeFoCosi. È possibile pagare un importo di 208 SeFoCosi senza ricevere resto? E se sì, come?

Soluzione. L'osservazione per cui $70 = 51+19 = 3\cdot17+19$ conduce molto rapidamente ad una soluzione. Potendo pagare 70 SeFoCosi (sottointendiamo: senza ricevere resto) possiamo pagare qualunque importo multiplo, ad esempio $210 = 9\cdot17 + 3\cdot19$. Aggiungendo una banconota da 17 e rimuovendone una da 19 abbiamo che

$$208 = 10\cdot17 + 2\cdot19,$$

dunque è possibile pagare 208 SeFoCosi utilizzando 10 banconote da 17 e 2 banconote da 19.
Questo è l'unico modo in cui possiamo effettuare il pagamento voluto. Dalla teoria abbiamo infatti che $\gcd(17,19) = 1$ garantisce che tutte le soluzioni intere di $17a + 19b = 208$ siano della forma
$a = 10 + 19k, b = 2 - 17k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Tuttavia c'è un solo valore di $k \in \mathbb{Z}$ per cui sia $10+19k$ che $2-17k$ sono numeri naturali, e questo è proprio $k = 0$.
Equivalentemente, con la notazione delle congruenze abbiamo che $a, b \in \mathbb{Z}$ e $208 = 17a + 19b$ comporta $208 \equiv 2b \pmod{17}$, ma d'altro canto $208 = 170 + 38 = 170 + 34 + 4 \equiv 4 \pmod{17}$, da cui segue $b \equiv 2 \pmod{17}$. Quando $b = 2$ abbiamo $a = 10$, ma quando $b \geq 3$ abbiamo $a \leq -9$, che confligge con il vincolo $a \in \mathbb{N}$.