# 3I - Test sulle competenze iniziali

## Testo e soluzioni

**Esercizio 1.** Quale delle seguenti frazioni è più vicina a $\sqrt{14441}$ ?

$$\textbf{A)}\,\frac{721}{6} \qquad \textbf{B)}\,\frac{601}{5} \qquad \textbf{C)}\,\frac{481}{4} \qquad \textbf{D)}\,\frac{361}{3} \qquad \textbf{E)}\,\frac{241}{2}$$

Osserviamo che $14641 = 11^4$, dunque $14441 = 121^2 - 200$. Da questo segue che

$$\sqrt{14441} = \sqrt{121^2 - 200} = 121\sqrt{1 - \frac{200}{121^2}} \approx 121 - \frac{100}{121} \approx 121 - \frac{5}{6} = 120 + \frac{1}{6} = \frac{721}{6}.$$

Alternativamente o parallelamente si può approssimare $\sqrt{14441} \approx 120.171$ e constatare che le opzioni dalla **B** alla **E** differiscono dalla precedente approssimazione per più di due centesimi, mentre la **A** differisce di circa cinque millesimi.

---

**Esercizio 2.** I vertici del triangolo $ABC$ si trovano in $A(0;0), B(4;1), C(1;5)$.
Qual è l'area del triangolo $ABC$?

$$\textbf{A)}\,\sqrt{83} \qquad \textbf{B)}\,9 \qquad \textbf{C)}\,9 + \frac{1}{2} \qquad \textbf{D)}\,10 \qquad \textbf{E)}\text{ nessuna delle precedenti}$$

Il fatto che i vertici abbiano coordinate intere esclude immediatamente l'opzione **A**.
Dalla formula di Gauss si ha subito $2[ABC] = 4 \cdot 5 - 1 \cdot 1 = 19$.

---

**Esercizio 3.** I lati del triangolo $ABC$ misurano $10, 12, 14$.
Quanto misura la mediana che arriva sul lato più lungo?

$$\textbf{A)}\,8 + \frac{1}{2} \qquad \textbf{B)}\,9 \qquad \textbf{C)}\,\sqrt{73} \qquad \textbf{D)}\,10 \qquad \textbf{E)}\text{ nessuna delle precedenti}$$

Per la formula di Apollonio (conseguenza della formula di polarizzazione) la lunghezza cercata è

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 12^2 - 14^2}{4}} = \sqrt{73}.$$

---

**Esercizio 4.** Se il perimetro di un triangolo è 12, quanto vale al massimo la sua area?

$$\textbf{A)}\,6 \qquad \textbf{B)}\,7 \qquad \textbf{C)}\,8 \qquad \textbf{D)}\,\sqrt{48} \qquad \textbf{E)}\text{ nessuno dei precedenti}$$

Il "solito" triangolo rettangolo ha perimetro 12 e area 6, dunque l'opzione **A** è da scartare.
Per la disuguaglianza isoperimetrica l'area massima è realizzata dai triangoli equilateri di lato 4, pertanto la risposta è $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$.

**Esercizio 5.** $p(x)$ è un polinomio di terzo grado, che in corrispondenza delle ascisse $x \in \{1,2,3,4\}$ assume ordinatamente i valori $1, 5, 21, 55$. Quanto vale $p(5)$?

**A)** 110 **B)** 111 **C)** 112 **D)** 113 **E)** non è univocamente determinato

Il fatto che i valori in $\{1,2,3,4\}$ siano tutti dispari esclude le opzioni **A** e **C**.
Possiamo facilmente ricostruire $p(5)$ utilizzando il metodo delle differenze in avanti:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 5 & & 21 & & 55 & & 113 \\ & 4 & & 16 & & 34 & & 58 & \\ & & 12 & & 18 & & 24 & & \\ & & & 6 & & 6 & & & \end{array}$$

---

**Esercizio 6.** Qual è il minimo valore assunto su $\mathbb{R}$ dal polinomio $f(x) = x^2 + 4x$ ?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** $-3$ **D)** $-2$ **E)** nessuno dei precedenti

Per completamento del quadrato $f(x) = (x+2)^2 - 4$, dunque $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -4$,
assunto in corrispondenza dell'ascissa $x = -2$.

---

**Esercizio 7.** $ABCD$ è un quadrilatero convesso nel piano, i cui lati, nell'ordine, misurano rispettivamente $5, 6, 7, 8$. Quanto può valere al massimo l'area di $ABCD$?

**A)** 40 **B)** 41 **C)** $4\sqrt{105}$ **D)** 42 **E)** nessuna delle precedenti

Per la disuguaglianza isoperimetrica l'area massima è raggiunta nella configurazione in cui $ABCD$ è ciclico. In tal caso il valore dell'area è immediatamente fornito dalla formula di Brahmagupta:
$[ABCD] = \sqrt{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 4\sqrt{105}$.

---

**Esercizio 8.** Si determinino le soluzioni dell'equazione $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 2$.

Posto $x + 1 = z$ si ha immediatamente che la funzione $f(z) = (z-1)^2 + z^2 + (z+1)^2 = 3z^2 + 2$ assume il valore 2 solo in corrispondenza di $z = 0$. Segue che l'unica soluzione è $x = -1$.

---

**Esercizio 9.** In un trapezio rettangolo la base maggiore ha lunghezza doppia rispetto alla base minore. Tracciando le diagonali del trapezio questo viene suddiviso in quattro triangoli. In che proporzione si trovano le aree di questi quattro triangoli? (Ad esempio $3 : 7 : 13 : 8$)

Per similitudine, il triangolo adiacente alla base maggiore ha area quadrupla rispetto a quello adiacente alla base minore. Per le proprietà del trapezio i triangoli adiacenti ai lati obliqui hanno la stessa area, e questa è data dalla media geometrica delle aree dei primi due triangoli. Segue che la proporzione cercata è $1 : 2 : 4 : 2$. Si arriva facilmente alla stessa conclusione anche considerando un generico triangolo in cui sono tracciate due mediane, e tagliandone via una parte fino a ricondursi alla configurazione proposta. Non è davvero rilevante che il trapezio sia rettangolo.

**Esercizio 10.** Il costo di 3 matite e 1 penna è 31 paperdollari, mentre il costo di 1 matita e 3 penne è 37 paperdollari. Qual è il costo di 5 penne e 5 matite?

Il costo in paperollari di 4 matite e 4 penne è 68, dunque 1 matita e 1 penna costano 17 e quanto richiesto è $5 \cdot 17 = 85$.

---

**Esercizio 11.** Dove va a finire il punto $P(4;1)$, quando questo viene ruotato di $60°$ in senso antiorario rispetto all'origine?

Utilizzando la notazione matriciale abbiamo che la risposta è data da

$$\begin{pmatrix} \cos(60°) & -\sin(60°) \\ \sin(60°) & \cos(60°) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

che cade abbastanza vicino a $(1;4)$.

---

**Esercizio 12.** Le corde $AC$ e $BD$ di una circonferenza si intersecano nel punto $X$, interno alla circonferenza. Se $XA = 2, XB = 4$ e $XC = 12$, quanto vale al massimo l'area di $ABCD$?

Per il Teorema delle corde $XD = 6$, dunque le diagonali del quadrilatero $ABCD$ misurano 10 e 14.
Per qualunque quadrilatero convesso (non necessariamente ciclico) il doppio dell'area coincide con il prodotto tra le lunghezze delle diagonali e il seno dell'angolo compreso. Quest'ultimo è massimizzato quando $AC \perp BD$, dunque la massima area è la metà di $10 \cdot 14$, ossia 70.

## Risposte corrette:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | **C** | **C** | **D** | **D** | **E** | **C** |

| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| $x = -1$ | $1:2:4:2$ | 85 | $\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}; 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$ | 70 |