Classi 1^e - Verifica Gennaio 25 - Soluzioni

Figura Esercizio 4.

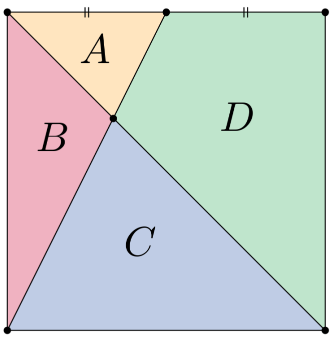


Figura Esercizio 6.

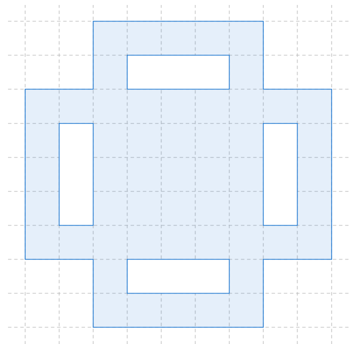
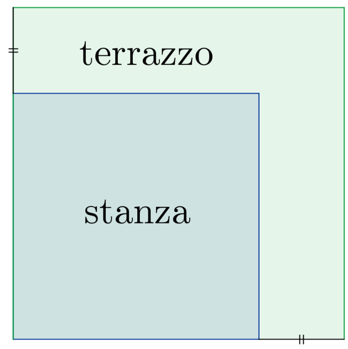


Figura Esercizio 2.



Esercizio 1. (10$\diamondsuit$) Si semplifichi il più possibile l'espressione riportata qui a destra.

$$\left[(2a+3b)^2 - \frac{(a^2-b^2)^2}{(a+b)^2}\right] : (a+4b)$$

Soluzione. Si ha $\frac{a^2-b^2}{a+b} = a-b$, che riconduce l'espressione a

$$\frac{(2a+3b)^2-(a-b)^2}{(a+4b)} = \frac{(a+4b)(3a+2b)}{a+4b} = 3a+2b.$$

Esercizio 2. (12$\diamondsuit$) In alto sono rappresentate le piante di una stanza quadrata e del terrazzo adiacente. Se l'area del terrazzo coincide con l'area della stanza, qual è il rapporto tra il perimetro del terrazzo e quello della stanza?

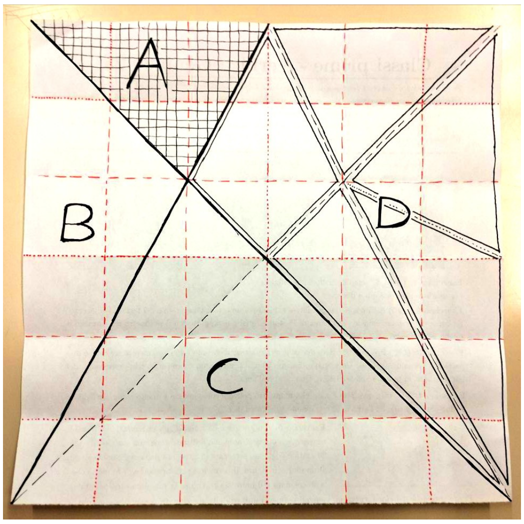
Soluzione. Riposizionando due lati del terrazzo (quelli in comune con la stanza) è facile realizzare che il perimetro del terrazzo coincide con quello del quadrato esterno Q. Dato che Q ha area doppia rispetto a quella della stanza, per il principio di scala il rapporto cercato è $\sqrt{2}$.

Esercizio 3. (14$\diamondsuit$) Presso il Bar Baro due caffè e tre pasticcini costano 7.45 euro, mentre tre caffè e due pasticcini costano 7.05 euro. Un giorno ordiniamo 50 pasticcini per un compleanno e la proprietaria del bar, Barbara, ci fa uno sconto del 30%. Quanto spendiamo?

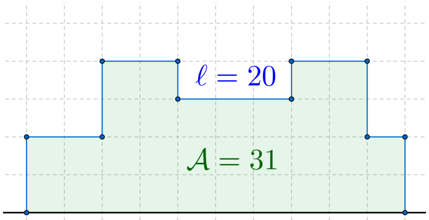
Soluzione. Indichiamo con c il prezzo in euro di un caffè e con p quello di un pasticcino. Le informazioni del testo $2c+3p = 7.45$ e $3c+2p = 7.05$ comportano $5c+5p = 14.50$, da cui $c+p = 2.90$ e $2c+2p = 5.80$. Per differenza $p = 1.65$. Acquistare 50 pasticcini scontati del 30% è analogo ad acquistarne 35 non scontati, dunque la spesa richiesta è di $35 \cdot 1.65 = 57.75$ euro.

Esercizio 4. (16$\diamondsuit$) Un quadrato è suddiviso in quattro poligoni come in figura (il lato superiore è diviso in due parti uguali). Se l'area di A è 1, quanto vale l'area di D?

Soluzione. Possiamo immediatamente osservare che A e C sono triangoli simili, dove i lati di C hanno lunghezza doppia rispetto ai lati di A. Per il principio di scala questo comporta che C abbia area 4. L'altezza verticale di A misura quanto l'altezza orizzontale di B, ma la base verticale di B ha lunghezza doppia rispetto alla base orizzontale di A, per cui B ha area 2. B e C coprono assieme metà dell'area del quadrato, e lo stesso vale per A e D. Segue che l'area di D è $4+2-1 = 5$.



È sicuramente possibile arrivare alla medesima conclusione in molti altri modi. Scegliendo ad esempio di ripartire $Q = A \cup B \cup C \cup D$ in $6 \times 6 = 36$ quadrati più piccoli ci si può facilmente accorgere che $A \cap B \cap C \cap D$ è un vertice della quadrettatura, e inoltre esiste un vertice della quadrettatura interno a D che, quando congiunto con i vertici di D e con il centro di Q, suddivide D in 5 parti che hanno tutte la stessa estensione di A, pur avendo forme diverse.
O ancora: $A \cap B \cap C \cap D$ è il baricentro di un triangolo rettangolo in cui i cateti misurano quanto un lato di Q e il doppio di un lato di Q. Dal fatto che il baricentro cade a $\frac{2}{3}$ di ogni mediana segue $[D] = [B] + [C] - [A] = 5$ come prima.



Esercizio 5. (20◇) Giocando a *JackCraft* ci imbattiamo in un interessante problema: abbiamo a disposizione una staccionata lunga 20 unità e vogliamo attaccare le estremità della staccionata in punti di un muro (in figura, il segmento nero orizzontale) in modo che tra la staccionata e il muro sia racchiusa la massima area possibile. Per le specifiche del gioco, tuttavia, i singoli segmenti unitari della staccionata possono essere solo orizzontali o verticali. In termini equivalenti, la staccionata deve seguire le linee della quadrettatura. Che forma dobbiamo dare alla staccionata per racchiudere la massima area possibile?

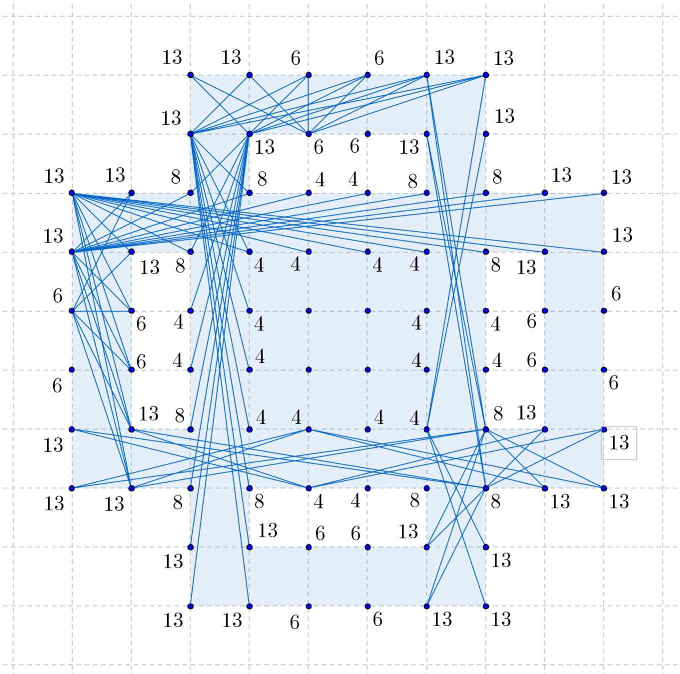
Soluzione. La parte più delicata dell'esercizio è dimostrare che una staccionata che racchiude la massima area possibile non può avere "sporgenze" o "rientranze". In termini più precisi, dimostrare che seguendo il profilo della staccionata, quando svoltiamo di 90° lo facciamo sempre nello stesso verso. Se infatti una svolta verso destra fosse seguita da una verso sinistra (o il viceversa), scambiando l'ordine con cui affrontiamo due lati consecutivi della staccionata ne otterremmo una di perimetro identico ma che racchiude un'area maggiore. Questo è un esempio di *principio variazionale*: se piccole modifiche di un percorso lo migliorano, il percorso considerato non è ottimale. In particolare per un percorso ottimale miglioramenti locali non devono essere possibili, o devono lasciare inalterata la forma del percorso. Nel nostro caso, come nel caso del problema isoperimetrico, questo ci dà che le staccionate ottimali (non è detto che la soluzione sia unica!) delimitano regioni convesse. Inoltre l'impossibilità di avere alternanza nel verso delle "svolte" forza le staccionate ottimali a delimitare dei **rettangoli**.
Le staccionate ottimali coprono tre dei quattro lati della regione delimitata (il quarto lato è delimitato dal muro) e per i vincoli del problema le lunghezze dei lati dei rettangoli ottimali devono essere dei numeri naturali. A questo punto è sufficiente passare in rassegna poche configurazioni, date dai rettangoli 1×18, 2×16, 3×14, 4×12, 5×10, 6×8, 7×6, 8×4, 9×2. Per ispezione diretta possiamo finalmente concludere che il profilo ottimale è quello di un rettangolo 5×10, di area 50. Quest'ultimo può essere facilmente ottenuto dalla staccionata rappresentata nel testo "ribaltando" più volte i lati opportuni, ma limitarsi a produrre una configurazione di area 50 non fornisce di per sé garanzie sul fatto che 50 sia effettivamente la massima area delimitabile.

Esercizio 6. (24$\diamondsuit$) La "padella" raffigurata in alto è costituita da un quadrato centrale di 5×5 quadretti e 4 "manici" da 7 quadretti ciascuno. Si determini, argomentando, quanti sono i rettangoli interni alla padella costituiti da uno o più quadretti della padella stessa.

Soluzione. Per quanto visto a lezione i rettangoli contenuti nel quadrato centrale sono $\binom{6}{2}^2 = 15^2 = 225$, e non resta che contare gli altri. Per ogni manico abbiamo 19 rettangoli costituiti da quadretti del manico, il che porta la conta a $225 + 4 \cdot 19 = 301$. Vanno ora conteggiati i rettangoli che si trovano a cavallo tra il corpo centrale e uno o più manici. Consideriamo una striscia da 9 quadretti che si estende da un manico a quello opposto: lungo questa striscia si trovano $\binom{10}{2} = 45$ rettangoli, dei quali però 15 sono interni al quadrato centrale e 6 sono interni ad uno dei manici. Per ogni striscia da 9 quadretti abbiamo dunque 24 rettangoli a cavallo tra il quadrato centrale e uno o più manici, e il conteggio complessivo individua

$$301 + 4 \cdot 24 = 397$$

rettangoli in padella. È certamente possibile arrivare alla medesima conclusione anche adoperando alternative strategie di inclusione/esclusione, o semplicemente catalogando i rettangoli in base alla loro forma. Ad esempio, abbreviamo con *extra* l'espressione "non interamente contenuti nel corpo centrale":



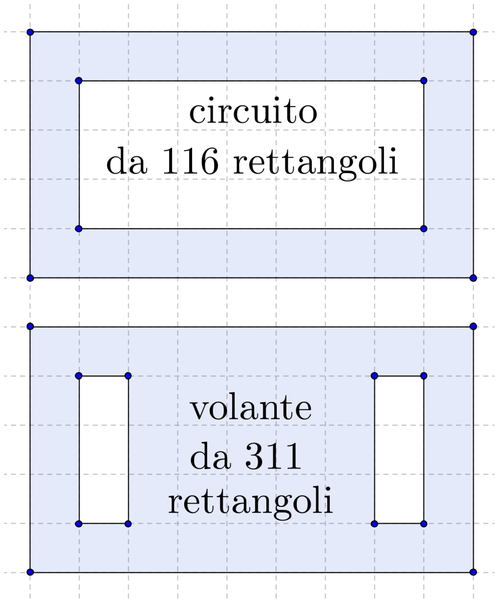
1. rettangoli 1×1 extra: 28
2. rettangoli 1×2 o 2×1 extra: 32
3. rettangoli 1×3 o 3×1 extra: 28
4. rettangoli 1×4 o 4×1 extra: 24
5. rettangoli 1×5 o 5×1 extra: 20
6. rettangoli 1×6 o 6×1 extra: 16
7. rettangoli 1×7 o 7×1 extra: 12
8. rettangoli 1×8 o 8×1 extra: 8
9. rettangoli 1×9 o 9×1 extra: 4

Visto lo spessore dei manici, non esistono rettangoli extra che abbiano sia altezza che larghezza maggiori di 1. La conta totale è pertanto realizzata da $225 + 28 + 32 + 28 + 24 + 20 + 16 + 12 + 8 + 4 = 397$.

Con sufficiente coraggio era anche possibile adattare il "metodo delle diagonali" visto in classe.
Ci interessa contare i rettangoli extra, dunque per ogni vertice di un quadretto della padella possiamo riportare quante sono le *extradiagonali* uscenti, dove per *extradiagonale* intendiamo la diagonale di un rettangolo extra. Per la simmetria della padella questa conta è meno tortuosa di quanto ci si potrebbe aspettare: dai quattro vertici centrali non escono extradiagonali, da ognuno degli altri escono $4, 6, 8$ oppure 13 extradiagonali. Sommando le quantità associate ai vertici riportati in figura otteniamo

$$13 \cdot 32 + 8 \cdot 12 + 6 \cdot 16 + 4 \cdot 20 = 688$$

il che conferma i precedenti 172 rettangoli extra già trovati, visto che ogni rettangolo extra è contato per 4 volte: 2 volte per ogni diagonale, percorsa in senso ascendente o discendente.



Un'altra idea interessante è quella di "assemblare" la padella come $A \cup B$, dove si siano già contati i rettangoli in A, in B e in $A \cap B$. Questo è il *principio di inclusione-esclusione*, ingrediente chiave sia di risultati elementari (come $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$) che avanzati (Seifert-Van Kampen, Mayer-Vietoris). Consideriamo ad esempio il *circuito* e il *volante* rappresentati accanto. Poiché in una striscia da n quadretti vi sono $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ rettangoli, nel circuito vi sono $45+45+15+15-4 = 116$ rettangoli. Sovrapponendo il circuito ad un quadrato 5×5 otteniamo il volante da $225+116-2 \cdot 15 = 311$ rettangoli. Sovrapponendo il volante ad un circuito ortogonale al primo otteniamo la padella da $311 + 116 - 2 \cdot 15 =$ 397 rettangoli.