

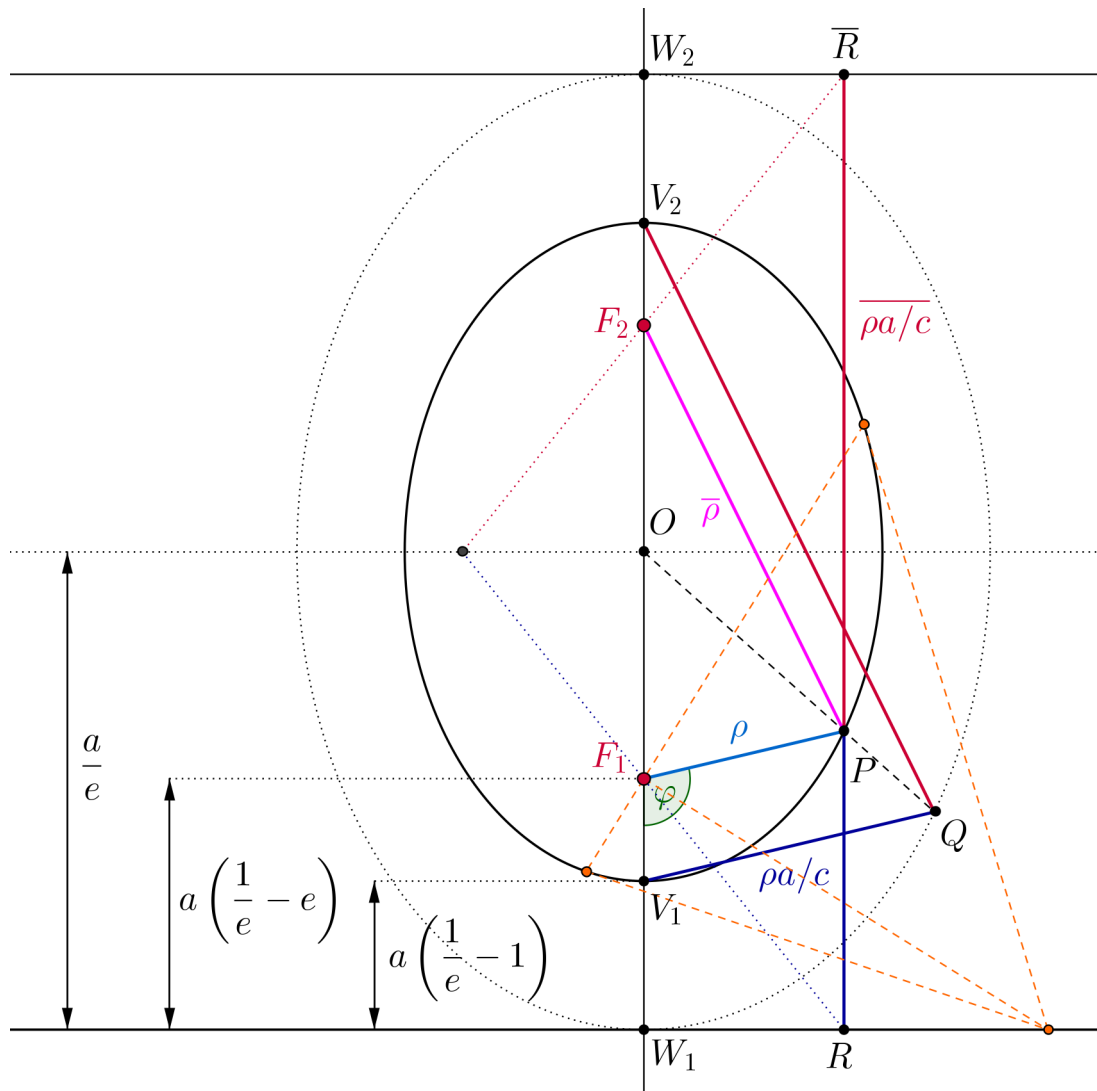
Sulla direttrice di una ellisse

Abbiamo visto a lezione che dato un numero $e \in (0, 1)$, un punto F del piano e una retta r non passante da F si ha

Teorema 1. Il luogo dei punti P del piano per cui PF è pari ad e volte la distanza tra P ed r è una **ellisse** di eccentricità e con fuoco in F .

Ciò permette di descrivere qualsiasi ellisse tramite una piccola variante dell'identità che caratterizza i punti di una parabola ($PF = d(P, r)$). Queste brevi note sono elaborate allo scopo di fornire una dimostrazione sintetica del Teorema 1 e di approfondire i legami tra ellisse e parabola.

Data una ellisse \mathcal{E} di fuochi F_1 ed F_2 , denominiamo V_1, V_2 i vertici dell'asse maggiore ed O il centro. Usiamo le lettere a, b, c, e per denotare i consueti elementi orbitali: semiasse maggiore, semiasse minore, semidistanza focale, eccentricità. Dato un punto $P \in \mathcal{E}$, denotiamo con ρ la lunghezza di PF_1 e costruiamo un punto R associato a P in modo che il vettore $R - P$ abbia direzione e verso coincidenti con quelli di $F_1 - O$ e modulo pari a ρ/e . Al variare di P su \mathcal{E} il nostro scopo è provare che R percorre una retta parallela all'asse minore.



Proof. Consideriamo una dilatazione di centro O e fattore $\frac{a}{c} = \frac{1}{e}$, che manda il punto P in Q . Dalla similitudine tra PF_1O e QV_1O si ha che $QV_1 = PR$. Al variare di $P \in \mathcal{E}$ il punto Q percorre una ellisse $\bar{\mathcal{E}}$ concentrica ed omotetica,

per la quale V_1, V_2 sono i fuochi e W_1, W_2 sono i vertici dell'asse maggiore. In particolare $QV_1 + QV_2$ non dipende da P ed è costantemente pari al diametro W_1W_2 di \mathcal{E} . Detto $\bar{\rho} = PF_2$ e \bar{R} il punto della retta RP che realizza $P\bar{R} = \frac{a}{c}\bar{\rho}$ (in modo che P appartenga al segmento $R\bar{R}$) si ha pertanto $P\bar{R} = PF_2$ e $R\bar{R} = W_1W_2$. Questo comporta che $W_1R\bar{R}W_2$ sia un parallelogramma. Per angle chasing le rette $\bar{R}F_2$ e RF_1 (così come le rette $\bar{R}V_2$ e RV_1) si intersecano lungo l'asse minore di \mathcal{E} : questo comporta che $W_1R\bar{R}W_2$ sia un rettangolo, dunque che R cada inevitabilmente lungo la tangente a \mathcal{E} in W_1 . Equivalentemente: esiste certamente una dilatazione dell'asse minore che manda P in \tilde{P} e rende le rette $\tilde{P}V_1, \tilde{P}V_2$ ortogonali, rendendo \tilde{P} un punto di una circonferenza di Apollonio simmetrica rispetto all'asse minore. Equivalentemente: V_2 e V_1 sono punti della circonferenza di Apollonio per cui $PF_1 = ePW_1$. Equivalentemente: V_2, F_1, V_1, W_1 sono una quaterna armonica. \square

Abbiamo già visto a lezione come sia molto più semplice venire a capo della questione utilizzando la descrizione di \mathcal{E} in coordinate polari, che discende dal Teorema del coseno ed ha un ruolo cruciale nella dimostrazione della prima legge di Keplero. Detta $\varphi = \widehat{V_1F_1P}$ l'anomalia vera, da

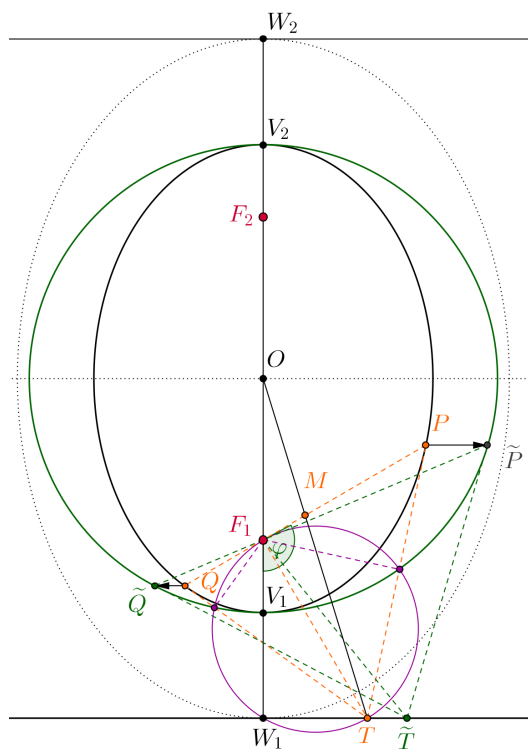
$$PF_1 = \frac{b^2/a}{1 + e \cos \varphi}$$

si ha immediatamente

$$\rho \cos \varphi + \frac{\rho}{e} = \frac{\rho}{e} (1 + e \cos \varphi) = \frac{\rho}{e} \cdot \frac{b^2/a}{\rho} = \frac{b^2}{c}.$$

Osservando attentamente l'illustrazione della pagina precedente possiamo maturare anche altri sospetti:

- Teorema 2.** 1. Come nel caso della parabola, la direttrice è la polare del fuoco;
2. Se PQ è una corda di \mathcal{E} passante da F , detto $T = \tau_P \cap \tau_Q$ si ha $TF \perp PQ$.



Entrambi i punti possono essere provati sfruttando la precedente corrispondenza tra \mathcal{E} e una circonferenza di Apollonio. Data una corda PQ di \mathcal{E} passante da F_1 , denotiamo con \tilde{P}, \tilde{Q} le immagini di P e Q secondo quella dilatazione dell'asse minore che manda \mathcal{E} nella circonferenza di Apollonio Γ di diametro V_1V_2 . L'immagine di $T = \tau_P \cap \tau_Q$ è $\tilde{T} = \tau_{\tilde{P}} \cap \tau_{\tilde{Q}}$, nonché l'inverso circolare del punto medio di $\tilde{P}\tilde{Q}$. Poiché la polare di F_1 rispetto a Γ è la direttrice (V_2, F_1, V_1, W_1) sono una quaterna armonica), la direttrice è anche la polare di F_1 rispetto ad \mathcal{E} . Per dimostrare il secondo punto è sufficiente sfruttare l'allineamento di O, T e il punto medio di M di PQ . Se P è associato all'anomalia vera φ allora Q è associato all'anomalia vera $\pi + \varphi$, e attraverso l'equazione polare si possono rapidamente trovare le componenti del vettore $M - F_1$, dunque le componenti del vettore $M - O$ e la tangente dell'angolo $\widehat{MOW_1}$, che fissa la lunghezza di TW_1 . È sufficiente pertanto verificare che $\frac{TW_1}{W_1F_1} = \tan \widehat{TF_1W_1} = \cot \varphi$ per provare l'ortogonalità del secondo punto. Alternativamente, possiamo sfruttare il fatto che le proiezioni di F su τ_P e τ_Q appartengono a Γ , per il Lemma preliminare nella determinazione dell'ortottica di una ellisse. Questi due punti, assieme a T, W_1 e F , appartengono tutti alla circonferenza di diametro FT , tangente a PQ .

La combinazione del Teorema 2 con il Teorema di De La Hire è interessante dal punto di vista algoritmico nel problema di determinare le tangenti ad una data ellisse \mathcal{E} da un punto esterno P . Rammentiamo un po' di terminologia:

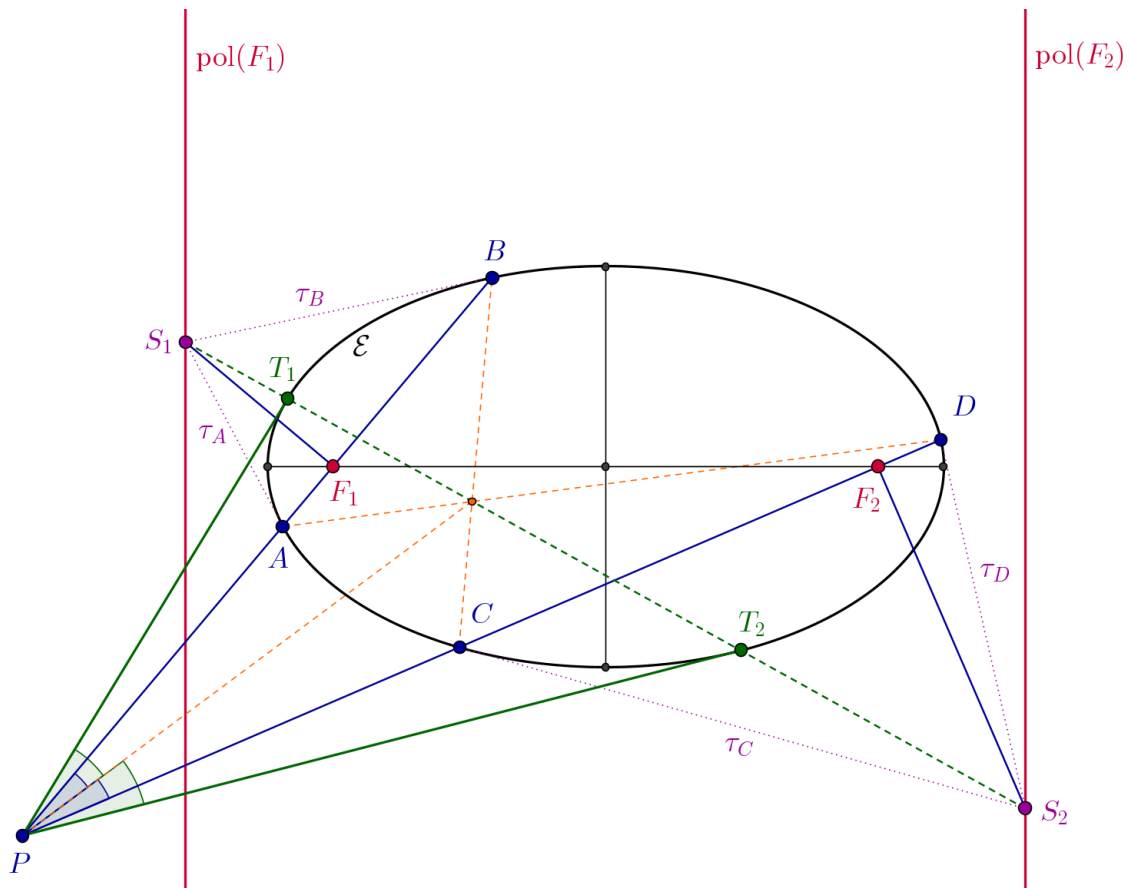
- dato $P \in \mathcal{E}$, $\text{pol}(P) = \tau_P$;
- se P è esterno ad \mathcal{E} , $\text{pol}(P)$ è la retta definita dai punti di tangenza delle tangenti uscenti da P ;
- se P è interno ad \mathcal{E} , $\text{pol}(P)$ è la retta definita da $\tau_A \cap \tau_B$ al variare di AB tra le corde di \mathcal{E} passanti da P .

Per quanto non sia ovvio a prima vista, l'associazione $P \rightarrow \text{pol}(P)$ è un'associazione continua e biunivoca tra punti del piano distinti dal centro di \mathcal{E} e le rette non passanti dal centro di \mathcal{E} . In particolare questa mappa codifica una *dualità* proiettiva. In questo contesto vale un risultato molto elegante:

Teorema 3 (De La Hire).

$$P \in \text{pol}(Q) \iff Q \in \text{pol}(P).$$

Vediamo un impiego interessante. La determinazione delle tangenti ad una ellisse \mathcal{E} da un punto esterno P può essere condotta imponendo l'annullamento del discriminante del sistema descritto dall'equazione di \mathcal{E} e da quella del fascio di rette per P . Esiste tuttavia un'alternativa più diretta, o quantomeno paragonabile per quanto concerne la complessità computazionale.



Indichiamo con A, B le intersezioni tra PF_1 ed \mathcal{E} , con C, D le intersezioni tra PF_2 ed \mathcal{E} . Poniamo inoltre $S_1 = \tau_A \cap \tau_B$ ed $S_2 = \tau_C \cap \tau_D$. Per quanto provato in precedenza $PF_1 \perp F_1S_1$ e $PF_2 \perp F_2S_2$. Inoltre:

Teorema 4.

$$T_1T_2 = \text{pol}(P) = S_1S_2.$$

Proof. Per costruzione $PF_1 = AB = \text{pol}(S_1)$ e $PF_2 = CD = \text{pol}(S_2)$. In particolare P giace sia sulla polare di S_1 che sulla polare di S_2 : per De La Hire sia S_1 che S_2 giacciono sulla polare di P . □

Dal Teorema 4 abbiamo la seguente costruzione delle tangenti da P :

1. costruiamo S_1 come intersezione tra $\text{pol}(F_1)$, direttrice di F_1 , e la perpendicolare a PF_1 per F_1 ;
2. costruiamo S_2 come intersezione tra $\text{pol}(F_2)$, direttrice di F_2 , e la perpendicolare a PF_2 per F_2 ;
3. le intersezioni T_1, T_2 tra \mathcal{E} e S_1S_2 sono i punti di tangenza delle tangenti condotte da P .

Osserviamo che questa costruzione non richiede di determinare esplicitamente le collocazioni di A, B, C, D .

In ogni caso è automatico che sia $AD \cap BC$ che $AC \cap BD$ appartengano a $\text{pol}(P) = T_1T_2$: questi punti giacciono sulla bisettrice interna e sulla bisettrice esterna dell'angolo $\widehat{T_1PT_2}$, nonché dell'angolo $\widehat{F_2PF_1}$, nonché dell'angolo $\widehat{S_2PS_1}$. In questo senso il Teorema 4 è una semplice estensione della proprietà ottica dell'ellisse.